NIVEAU : Tle C

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3.

Toute calculatrice scientifique traceuse n' est pas autorisée.

EXERCICE1

Soit trois points du plan A, B et C non alignés et soit k un réel de l'intervalle$[-1; 1]$.

On note G_k le barycentre du système : $\{(A, k^2 + 1), (B, k), (C, -k)\}$

1. Représente les points A, B, C, le milieu I de [AB] et construis les points G_1 et G_{-1}

2.a) Montre que, pour tout réel k de l'intervalle$[-1; 1]$, on a : $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\ \overrightarrow{BC}$.

b) Soit la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par : $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$.

Détermine $f([-1; 1])$.

c) En déduis l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1; 1]$

3. Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

4. Détermine et construis l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

EXERCICE2

On admet le critère de divisibilité par 7 suivant :

Pour savoir si un entier naturel n est divisible par 7, on sépare le chiffre des unités de n des autres chiffres et on effectue la différence entre le nombre formé par les autres chiffres et le double du chiffre des unités.

L'entier n est divisible par 7, si et seulement si, cette différence est divisible par7.

1. À l'aide de ce critère :

a) Montre que 4361 est divisible par 7.

b) Le nombre 542 est –il divisible par 7 ?

2. Dans la suite de l'exercice, on propose de démontrer ce critère pour tout nombre de trois chiffres.

Soit x un nombre entier naturel de trois chiffres dont l'écriture décimal est $x = \overline{abc}$ avec $a \neq 0$.

a) Montre que : $x \equiv 2a + 3b + c[7]$
b) On appelle y l'entier de la différence décrite dans le critère plus haut.
   Montre que : $y \equiv 3a + b - 2c[7]$
c) Déduis-en que $x - 3y \equiv 0[7]$ et $y + 2x \equiv 0[7]$
d) En utilisant la question 2.c), démontre que :

   $y \equiv 0[7]$ si et seulement si $x \equiv 0[7]$.Conclus

PROBLÈME

Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{(x-1)^2 lnx}{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Partie A

Soit Ψ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\Psi(x) = \ln(x) + \frac{x-1}{x+1}$.

1. Démontre que Ψ est strictement croissante sur$]0; +\infty[$.

2. Dresse le tableau de variation de Ψ (sans les limites aux bornes)

3. a) Calcule $\Psi(1)$

   b) Démontre que : $\forall\, x \in\,]0; 1[, \Psi(x) < 0\ et\ \forall\, x \in\,]1; +\infty[,\ \Psi(x) > 0$.

Partie B

1. Calcule la limite de φ à droite en 0. Donne une interprétation graphique.

2. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$. Donne une interprétation graphique.

3. a) Démontre que $\forall\, x \in\,]0; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{(x^2-1)\Psi(x)}{x^2}$

   b) Détermine le signe de $\varphi'(x)$ suivant les valeurs de x puis dresse le tableau de variation de φ

4. a) Démontre que l'équation $\varphi(x)$= 1 admet une solution uniqueα.

   b) Vérifie que : $2{,}64 < \alpha < 2{,}65$.

   c) Démontre que : $\forall\, x \in\,]0; \alpha[, \varphi(x) < 1 et\ \forall\, x \in\,]\alpha; +\infty[, \varphi(x) > 1$.

5. a) Détermine une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1

   b) Détermine les positions relatives de (C) et de l'axe des abscisses.

6. Soit k, la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $k(x) = \varphi(\frac{1}{x})$. On note **Γ** sa courbe représentative dans le repère orthonormé direct (O, I, J).

   a) Démontre que $\forall$ $]0;+\infty[$. $k(x) = -\varphi(x)$.

   b) Construis (C) et ( ) dans le même repère

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par $h(x) = \frac{ln^2 x}{2} + \frac{1}{x-1}$.

On note (C') sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

1. a) Calcule les limites de h aux bornes de son ensemble de définition ainsi que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x}$$

   b). Donne une interprétation graphique de ces résultats.

2. a) Démontre que $\forall\, x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, h'(x) = \frac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}$.

   b) Détermine le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) Dresse le tableau de variation de h.

3. a) Démontre que $h(\alpha) > 0$.

   b) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution β.

   Vérifie que $0{,}20 < \beta < 0{,}21$.

   c) Construis (C').

   Prends $\alpha = 2{,}6$; $\beta = 0{,}2$; $h(\alpha) = 1{,}08$

.