BACCALAUREAT BLANCSERIE :C
SESSION : FEVRIER 2020 **COEFFICIENT :**5
DUREE :4H

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux pages numérotées $1/3; 2/3$ *et* $3/3$
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par n+3.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :
$PGCD(3n^3 - 11n; n + 3) = PGCD(48; n + 3)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

EXERCICE 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les points A (2 ;1 ;3), B (−3 ; −1 ; 7) et C (3 ; 2 ; 4).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique :$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = \quad -3t \\ z = \quad 4 + t \end{cases}$, t étant un nombre réel.

a) Démontre que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b) Donne une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a) Montre que H est le barycentre de (A ; −2), (B ; −1) et (C ;2).

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ_1), des points M de l'espace tels que :$(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$

c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ_2), des points M de l'espace tels que : $\left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{29}$

d) Précise la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles $(\Gamma_1)\ et(\Gamma_2)$.

e) Le point S (−8 ; 1 ; 3) appartient-il à l'intersection des ensembles $(\Gamma_1)\ et(\Gamma_2)$? Justifie ta réponse.

PROBLEME

ln désigne la fonction logarithme népérien. Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par : $f(x) = (x^2 - 1)ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\ si x \neq -1\ et x \neq 1$

$$f(-1) = 0 \quad ; \quad f(1) = 0$$

Les résultats d'une partie non traitée pourront être utilisés dans les parties suivantes.

Partie I

1°) Soit h la fonction, de $[0;+\infty[vers\ \mathbb{R}$, définie par : $h(x) = \frac{-4x}{x^2-1} + 2ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

Etudie les variations de h sur son ensemble de définition.

2°) a) Calcule h (0) et détermine la limite de f en $+\infty$.

b) Déduis que : $\forall\ x\epsilon[0;1[\ , h(x) \geq 0\ \ et\ \ \forall\ x\epsilon]1;+\infty[, h(x) < 0$.

On ne cherchera pas à déterminer la limite de h quand x tend vers 1.

Partie II

1°) Soit g la fonction, de $[0;+\infty[vers\ \mathbb{R}$, définie par : $g(x) = 2xln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2$

Etudie les variations de g sur son ensemble de définition.

2°) Précise la limite de g en 1.

3°) a) Justifie que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 1$

b) Démontre que : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$

4°) a) Déduis des questions précédentes qu'il existe un nombre réel unique α, élément de] 0 ; 1[tel que $g(\alpha) = 0$.

b) Démontre que : $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.*(Pour les calculs on utilisera une machine ou les indications suivantes :* $0{,}69 < ln2 < 0{,}70\ \ et\ 1{,}73 < ln\frac{17}{3} < 1{,}74$)

Partie III*(Etude de f).*

1°) Etudie la parité de f.

2°) a) Démontre que f est continue en 1.

b) étudie la dérivabilité de f en 1 ? Interprète graphiquement le résultat.

3°) Etudie les variations de f sur IR.

4°) a) Calcule la limite de f en $+\infty$.

b) On admettra que : : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]=0$. Interprète graphiquement le résultat.

c) Utilise l 'égalité $g(\alpha)=0$ pour démontrer que : $f(\alpha)=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}$.

d) Trace (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

On indiquera sur le graphique les tangentes à (C_f) aux points d'abscisse : $-1; 0; 1;\ \alpha\ et-\alpha$.