UP LYCEE CLASSIQUE ABIDJAN **ANNEE SCOLAIRE 2019-2020**

SUJET MATHEMATIQUES SERIE C

EXERCICE 1

1- Soit le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 + (-6 + i)z^3 + (17 - 7i)z^2 + (-26 + 14i)z + 20(1 - i)$

a) Résous dans I,C, l'équation : $z^2 = -5 + 12i$

b) Résous dans I,C, l'équation : $z^2 +(-4 + i)z + 5 - 5i = 0$

c) Vérifie que pour tout $z \in$ I,C, $P(z) = (z^2 +(- 4 + i)z + 5 - 5i)(z^2 -2z + 4)$

d) Résous dans I,C, l'équation $P(z) = 0$.

2- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u} ;\vec{v})$, on considère les points A ; B ; C et Ω d'affixes respectives 4 ; $1 + i\sqrt{3}$; $1 - i\sqrt{3}$ et 1.

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de centre Ω passant par les points A et B , d'axe focal la droite de repère $(O, \vec{u})$.

a) Détermine l'affixe du point A' tel que [AA'] soit le grand axe de (E).

b) Démontre que B et C sont des sommets de (E).

c) Justifie que dans le repère (O ; I ; J), une équation cartésienne de (E) est **Erreur !** + **Erreur !** = 1

d) Détermine les foyers, les directrices et l'excentricité de (E).

e) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (E) avec l'axe des ordonnées.

f) Trace (E).

EXERCICE 2

Les deux parties A et B sont indépendantes

Partie A

1- On considère dans **Erreur !** l'équation (E) d'inconnue x : $3x^2 + 6x + 5 \equiv 0[7]$

a) Etablis que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $3x(x + 2) \equiv 2[7]$.

b) Résous l'équation (E). (On pourra s'aider d'un tableau de congruence modulo 7).

2- Soit A un entier naturel tel que $A = \overline{361}^{b}$ dans le système de numération de base b $(b \geq 2)$ et A a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.

a) Démontre que b est solution de (E).

b) Déduis l'ensemble des valeurs possibles de b.

Partie B

1-Soit a et b deux nombres entiers non nul, démontre que pgcd (a ; b) = pgcd (a ; a – b)

2-. Soit n un entier relatif différent de – 2 et 3

a) Démontre que pgcd (2n +4 ; 2n – 6) = 2pgcd (n +2 ; 5)

b) Déduis le pgcd (2n + 4 ; 2n – 6) en fonction de n.

3- Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres $a_n = 5\times10^n - 1$ et $b_n = 5\times10^n + 1$

Démontrer que a_n et b_n sont premiers entre eux

PROBLEME

Soit f la fonction définie de ℝ vers ℝ définie par **Erreur !**

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ;I ;J). Unité : 1 cm

Partie A

1- Justifie que l'ensemble de définition de f est $D_f = [0 ; +\infty[\setminus \{e^{-1} ; e\}$

2-a) Démontre que f est continue en 0.

b) Etudie la dérivabilité de f en 0. Quelle conséquence graphique peut-on déduire pour (C).

c) Démontre que f est dérivable en 1 puis détermine une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

3- Calcule la limite de f en $+\infty$.

4-a) Pour $x \neq 0$, $x \in D_f$ Exprime $f(\frac{1}{x})$ en fonction de f(x).

b) Calcule la limite de f à gauche et à droite en e .

c) A l'aide des questions 4a) et 4-b) détermine les limites de f à gauche et à droite en e^{-1}. .

d) Précise les éventuelles asymptotes à (C).

5-a) Calcule f '(x) pour $x \in]0 ; 1[\setminus \{e^{-1}\}$ et pour $x \in]1 ; +\infty[\setminus \{ e\}$

b) Donne les variations de f et dresse son tableau de variations.

6-a) Construis la courbe (C).

b) A l'aide de la courbe (C) ; discute suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle] e^{-1} ; e[

1-Justifie que g est une bijection de $]e^{-1} ; e[$ vers un intervalle J à préciser.

2- Détermine l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} puis calcule $(g^{-1})'(0)$

3-a) Détermine l'expression explicite de $g^{-1}(x)$

b) En étudiant la dérivabilité de g^{-1} à gauche et à droite en 0 le résultat de $(g^{-1})'(0)$.

4- Construis (C') la courbe représentative de g^{-1}.