BAC BLANC | **UP Adjamé 3** | **Durée : 4 heures**
Coefficient : 4

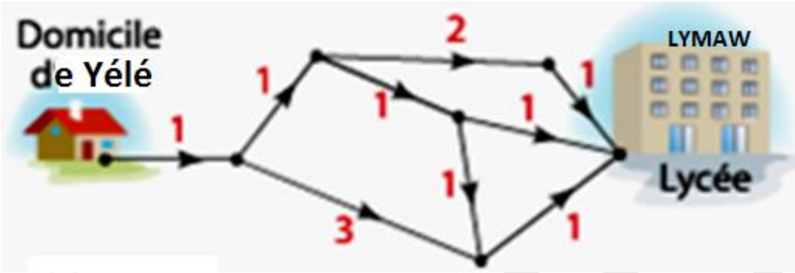
SÉRIE : D

MATHÉMATIQUES

Ce sujet comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.
Toute calculatrice est autorisée.

Exercice 1

Pour se rendre au lycée de Williamsville, Yélé une élève de la terminale D2, peut emprunter l'un des chemins schématisé ci – dessous. Les distances indiquées sur les segments de chemin sont exprimées en centaines de mètres



Chaque matin, Yélé tire au hasard le chemin qu'elle empruntera. X est la variable aléatoire qui donne la longueur du chemin emprunté.

Partie 1

1. Détermine les valeurs de X à partir des 4 chemins qu'elle peut emprunter
2. Détermine la loi de probabilité de X
3. Calcule son espérance mathématiques E (X) et son écart type $\sigma(X)$
4. Yélé se déplace à vélo à une vitesse v = 1,425 km. h $^{-1}$.A quel instant au plus tard doit – elle quitter son domicile pour s'assurer d'être à l'heure au cours de 7 h 30 mn ?

Partie 2

Dans la semaine, Yélé a cours lundi, mardi, jeudi et vendredi.

1. Calcule la probabilité quelle parcours 1.7 km durant 3 jours
2. Y est la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'elle emprunte le chemin le plus court.
   a. Donne la loi de probabilité de Y
   b. Combien de fois en moyenne emprunte – t – elle un plus court chemin ?
   c. Déduis-en la longueur moyenne parcourue par semaine pour se rendre au lycée.

Exercice 2

1. Justifie que $a = \sqrt{3} + i$ et $m = \sqrt{3} - i$ sont les solutions de l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$
2. Ecris a et m sous forme exponentielle
3. A et M sont deux points d'affixes respectives a et m
   a. Place A et M dans un repère $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ du plan complexe (unité 2 cm)
   b. B et C sont deux points d'affixes respectives b = a i et c =bi. Calcule b et c sous forme algébrique.
   c. Place B et C dans le repère $(O;\vec{u}\,,\,\vec{v})$
   d. Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle
   e. Détermine l'affixe d du point D tel que ABCD soit un carré puis place D.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = -1 + x(lnx)^2$

1) Calculer la limite de g en $+\infty$ et justifier que -1 est la limite de g en 0.
2) a) Démontrer que $\forall x \in]0;\ +\infty[, g'(x) = (2 + lnx)lnx$.

   b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation

3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $2{,}02 < \alpha < 2{,}03$

   b) Démontrer que $\forall x \epsilon]0; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \epsilon]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit la fonction $f\ de\ \mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{1}{lnx} + x \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $[0,1[\cup]1\ ;+\infty[$.
2) Etudier la continuité de f en 0.
3) a) Calculer les limites de f à gauche et à droite en 1.Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

4) Etudier la dérivabilité de f en 0 et préciser une équation du support de la demi-tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

5) a) Justifier que $\forall x \epsilon]0\ ;\ +\infty[\backslash\{1\} f'(x) = \frac{g(x)}{x(lnx)^2}$

   b) En déduire les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

   c) Interpréter graphiquement la valeur de $f'(\alpha)$.

6) a) Démontrer que $f(\alpha) = (\sqrt{\alpha} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

   b) En déduire que 4,45 une valeur approché de $f(\alpha)$ à 2×10^{-2} prés.

7) a) Démontrer que la droite (D) d'équation y=x+1 est une asymptote à (C_f).

   b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (D).

8) Construire (D) et (C_f).

Partie C

Soit h la restriction de f à $[\alpha; +\infty[$.

1) Démontrer que h est une bijection de $[\alpha; +\infty[$ dans un intervalle K que l'on précisera.
2) On désigne par h^{-1} la bijection réciproque de h et par $(C_{h^{-1}})$ sa courbe représentative.
   a) Calculer $h^{-1}(2 + e)$ puis $(h^{-1})'(2 + e)$.
   b) h^{-1} est-elle dérivable en $h(\alpha)$? Justifier la réponse.
   c) Préciser une équation de la tangente à $(C_{h^{-1}})$ au point d'abscisse h(α).
   d) Dresser le tableau de variation de h^{-1}
3) Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère que (C_h)