



MATHÉMATIQUES



SÉRIE A₁

cette épreuve comporte deux pages numérotées $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{3}$.. le candidat viendra avec deux feuilles de papier millimétré. Toute calculatrice scientifique est autorisée

EXERCICE 1

Soit P la fonction polynôme définie par $P(x) = 3x^2 + x - 4$

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $3x^2 + x - 4 = 0$
 b) Étudier le signe de $P(x)$
2. En déduire de ce qui précède la résolution de :
 $(E_1) \ 3(\ln x)^2 + \ln x = 4$
 $(I_1) \ 3(\ln x)^2 + \ln x \leq 4$
 $(E_2) \ \ln x + \ln(3x + 1) = 2\ln 2$
 $(I_2) \ \ln x > \ln 4 - \ln(3x + 1)$

EXERCICE 2

En prévision du lancement d'un nouveau produit, la SACO a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Prix de vente en millier de francs	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels	180	160	150	130	100	90	80	70

- 1 – Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère $(x; y)$ dans le plan muni du repère orthonormé (o, i, j) . (Unité : 1cm pour 1000 francs en abscisse, 1cm pour 10 acheteurs en ordonnée)

2-Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3-a) Calculer la variance $V(x)$ de x .

b) Calculer la covariance $COV(x; y)$ de la série statistique double de caractère $(x; y)$.

c) On admet que $V(y)=1450.003$. Démontrer que l'arrondi d'ordre 3 du coefficient de corrélation r est égal à $-0,995$. Interpréter le résultat obtenu.

4- Soit (D) la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

a) Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de la droite (D) est égal à $-13,83$.

b) Démontrer qu'une équation de la droite (D) est

$(y = -13,83x + 299,79)$ puis tracer la droite (D)

5-Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.

6-En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x , déterminer :

a) le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13000 F.

b) le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

PROBLEME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2cm). Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

On note (C) sa représentation graphique

PARTIE A

1-a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que $\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (1 + \ln x)$ puis déterminer la limite de f en 0.

2-a) Montrer que $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ puis vérifier que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

b) Etudier les variations de $f(x)$ puis dresser son tableau de variation

c) En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0; +\infty[$,

PARTIE B

1- a) Résoudre l'équation $f(x) = 1$ puis l'inéquation $f(x) > 1$.

b) En déduire la position relative de (C) par rapport à (Δ) d'équation $y=1$.

2- Soit A le point d'intersection de la courbe (C) et la droite (Δ) .

a) Déterminer les coordonnées du point A.

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

3- Construire (T), (Δ) et (C) dans le repère (O,I,J)

PARTIE C

On considère la fonction F dérivable et définie sur $]0; +\infty[$, par

$$G(x) = \frac{1}{2} (1 + \ln x)^2 \quad \text{Rappel : } (g^2)' = 2g'g^{2-1}$$

1. Vérifier que G est une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

2. a) Calculer l'intégrale $I = \int_1^e g(x) dx$

b) calculer $\mathcal{A} = \int_1^e 1 - \left(\frac{1+\ln x}{x}\right) dx$, que l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 , du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est égal $0,87 \text{ cm}^2$