BACCALAURÉAT
SESSION 2013

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra trois (03) feuilles de papier millimétré
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (*4 points*)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives $z_1 = 2$, $z_2 = 4 + 2i$ et $z_3 = 2 + 4i$. L'unité graphique est 2 cm.

1- *a)* Placer les points K, A et B.

b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

2- On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z - 2i$.

b) Déterminer les affixes respectives des points I' et J', images respectives des points I et J puis placer I' et J'.

3- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S.

4- Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1 ; 1)$ et de rayon 2.

a) Tracer (C).

b) Déterminer le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.

c) Construire (C').

5- *a)* Déterminer puis construire l'image par S de la droite (IJ).

On pourra caractériser l'image par S de la droite (IJ) par deux de ses points.

b) On désigne par E le point d'intersection de (C) et la droite (IJ) d'abscisse négative. Placer E et l'image E' de E par S. Justifier la position du point E'.

EXERCICE 2 (*4,5 points*)

On considère la suite numérique (u) définie par :

$u_0 = \sqrt{2}$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

1- Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et de représentation graphique (D).

a) Tracer (D) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

b) Placer u_0 sur l'axe (OI).

c) A l'aide de (D) et (Δ), placer les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u) sur l'axe (OI).

3- *a)* Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 4$.

b) Démonter que la suite (u) est croissante.

c) En déduire que la suite (u) est convergente.

4- On considère la suite (v) définie par $v_n = u_n - 4$, pour tout nombre entier naturel n.

Démontrer que la suite (v) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

5- On pose, pour tout nombre entier naturel n :

$T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (v) ;

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (u).

a) Déterminer une expression de T_n en fonction de n.

b) Justifier que : $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) + 4(n + 1)$.

c) Déterminer la limite de S_n.

PROBLÈME (*11,5 points*)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty\ ;\ 1[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + ln(1 - x)$.
On note (C) la courbe représentative de f.

1- a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

c) Calculer la limite de f à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.

2- *a)* Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, calculer $f'(x)$.

b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3- *a)* Démontrer que l'équation (E) : $x \in\ ]-\infty\ ;\ 1[, f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$.

4- a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3	-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

Tracer (T) et (C).

On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par $\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 5 \\ -4 \leqslant y \leqslant 6 \end{cases}$.

5- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

a) Calculer $\int_{\alpha}^{0} ln(1-x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) Démontrer que la valeur de $\mathcal{A}$ en unités d'aire est : $\mathcal{A} = \dfrac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)ln(1-\alpha)$.

c) Déterminer en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de $\mathcal{A}$ pour $\alpha = -0{,}65$.

6- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J).

a) Calculer $f(-1)$.

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $ln\ 2$ existe puis le calculer.

c) Construire la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse $ln\ 2$ sur la figure de la question 4-b).