COLLÈGES CATHOLIQUES
NOTRE DAME D'AFRIQUE
ET SAINT JEAN BOSCO

BAC BLANC
Session Janvier 2018

Coefficient : 05 **Durée : 04 heures** **Série : C**

EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Exercice : 1

A chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Etape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Etape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Etape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations :
$$x' \equiv px + q[26] \text{ et } 0 \leq x' \leq 25.$$
Etape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1- Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.
On considère l'équation (E): $9u + 26v = 1$, où u et v désignent deux nombres entiers relatifs.

$a)$ Démontre que la lettre V est codée par la lettre J.
$b)$ Cite le théorème qui permet d'affirmer que l'équation (E) admet au moins une solution. Vérifie que le couple $(3; -1)$ est solution de (E).
$c)$ Résous alors l'équation (E).
$d)$ Démontre que $x' \equiv 9x + 2\ [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20\ [26]$.
$e)$ Décode la lettre R.

2- Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D. Détermine la valeur de p (on admettra que p est unique).

3- Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Code les lettres B et D.
Un codage est dit bon lorsque le décryptage donne une unique solution.
Que peut-on dire de ce codage ?

Exercice : 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.
On considère l'application f qui, a tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2 - 3i$, $b = i$ et $c = 6 - i$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1- a) Calcule $\frac{b-a}{c-a}$.

b) En déduis la nature du triangle ABC.

2- Soit D le point d'affixe $d = 1 - i$. Détermine l'affixe d' du point D' image du point D par f.

3- a) Démontre qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$.

b) Démontre que E est un point de la droite (AB).

4- Démontre que, pour tout point M distinct du point B, $OM' = \frac{AM}{BM}$.

5- Démontre que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

6- Démontre que si le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

7- Démontre que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

PROBLEME

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 4 *cm*.

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2 \text{ pour } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1.) a- Justifie que g est continue à droite en 0.

b- Calcule les limites de $g(x)$ et de $\frac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Interprète graphiquement ces résultats.

2.) Etudie la dérivabilité de g à droite en 0 et donne une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.

3.) a- Justifie que $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = (-\ln x)(2 + \ln x)$

b- Etudie avec soin le signe de $g'(x)$ et dresse le tableau de variation de g.

4.) a- Démontre que sur $[0;+\infty]$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α et que $2 < \alpha < 2{,}1$.

b- En déduis que $\forall x \in [0;\alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $g(x) < 0$.

c- Prouve que $\ln(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Partie B

Soit f la fonction numérique dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{1+x\ln x}$ et

(C_f) est sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J).

1- Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis précise les éventuelles asymptotes à (C_f).

2- a) Justifie que $\forall\, x\in\,]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x(1+x\ln x)^2}$.

b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c) Vérifie que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$ et donne un encadrement de $f(\alpha)$.

3) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I du repère.

4) Construis (T) et (C_f) en prenant $f(\alpha)=0,29$.

Partie C

1- Justifie que f réalise une bijection u de l'intervalle $]0;\alpha[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

2- Soit u^{-1} la bijection réciproque de u.

a) Dresse le tableau de variation de u^{-1}.

b) Calcule $(u^{-1})'(0)$ puis en déduis une équation de la tangente (T') à (C') au point d'abscisse 0.

c) Trace sur le même graphique que (C_f), la droite (T') et la courbe (C'), représentation graphique de la bijection réciproque de u.