

SÉRIE C

DURÉE 4H

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats**L'utilisation d'une calculatrice non programmable est autorisée.**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies*EXERCICE 1

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de centre O tel que

$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. On appelle (Γ) le cercle circonscrit à ABC, I le milieu de $[AB]$, J le milieu

de $[OI]$. Les droites (OA) et (OC) recoupent (Γ) respectivement en D et E.

1- Faire une figure

2- On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E

a- Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$

b- Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OD}$

c- Démontrer que les droites (OB) et (DJ) se coupent en G

3- A tout point M du plan, on associe le point $M' = f(M)$ défini par :

$$4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$$

a- Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport

b- Quelles sont les images des points B et D ?

4- Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{2\pi}{3}$ et $S = r \circ f$

Démontrer que S est une similitude directe, préciser son rapport et son angle.

5- a- Construire le point H image de G par S

b - Démontrer que le centre Ω de S appartient aux cercles circonscrits respectivement aux triangles OGH et BOD

c - Construire Ω

EXERCICE 2

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher numérotées : 103, 117, 127, 174, 221, 273

A On tire au hasard une boule de l'urne et on note α a son numéro

1- a- Quelle est la probabilité des événements suivants :

E : « α est congru à 0 modulo 3 »

F « α est congru à 0 modulo 7 »

b- Calculer la probabilité de l'événement $E \cap F$

2- A chaque tirage, on associe le nombre de diviseurs positifs de α

a- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X ainsi définie

b- Calculer l'espérance mathématique de X

B. On tire simultanément deux boules de l'urne. On note α et β les numéros obtenus.

A chaque résultat, on associe le nombre de facteurs premiers communs à α et β

1- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ainsi définie.

2- On effectue dix fois ce tirage de deux boules en remettant chaque fois les deux boules tirées.

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux boules ayant deux facteurs premiers communs ?

Problème

PARTIE A. L'objet de cette partie est d'étudier la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \frac{\ln x}{1+x}$$

On note (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. unité graphique :

2 cm

1- Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

a- Déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition

b- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

c- Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution β unique dans $]0; +\infty[$

d- Déterminer le signe de g sur son ensemble de définition

e- Montrer que : $3,5 < \beta < 3,6$

2- Etude de f

a- Etudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition

b- Démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$

c- Déduire les variations de f

d- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) avec la droite (D) d'équation $y = 2$

e- Etudier la position relative de (C) par rapport à (D)

f- Construire (C)

3- Encadrement d'une intégrale

Pour tout réel t de l'intervalle $[1; +\infty[$, on pose $I(t) = \int_0^t \frac{\ln x}{1+x} dx$

a- Interpréter géométriquement cette intégrale à partir de la courbe (C).

b- Calculer l'intégrale $J(t) = \int_0^t \frac{\ln x}{x} dx$; où $t \geq 1$

c- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $K(t) = \int_0^t \frac{\ln x}{x^2} dx$; où $t \geq 1$.

Montrer que $0 \leq k(t) \leq 1$

d- Vérifier que pour tout élément $x \geq 1$; on a : $0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{x^2}$.

En déduire que $0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)$

e- Déterminer la limite de $\frac{I(t)}{(\ln t)^2}$ quand t tend vers $+\infty$

PARTIE B. L'objet de cette partie est d'étudier la solution α de l'équation $f(x) = x$, où $x \geq 1$

A cet effet on introduit la fonction h définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - x$

1- Etude de h

a- Etablir que h est décroissante sur $[\beta; +\infty[$

b- Etablir que pour tout élément x de $[1; \beta]$; $0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$

c- Déduire le sens de variation de h sur $[1; \beta]$

2. Etude de l'équation $f(x) = x$

a- Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[1; +\infty[$

Montrer que $2 \leq \alpha \leq 3$

b- Prouver que pour tout élément x de $[2; 3]$, on a $f(x) \in [2; 3]$

c- Etablir que pour tout élément x de $[2; 3]$, on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{g(2)}{18} \leq \frac{1}{10}$

d- Montrer que pour tout élément x de $[2; 3]$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{10}|x - \alpha|$

3. Soit (U) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2; 3]$

b- Etablir que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c- Déduire que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n$

d- Déduire que $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$