MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE

**Collège Catholique**

**Saint-Jean Bosco**

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

Union - Discipline - Travail

# EXAMEN BLANC SESSION 2011

## SERIE D DUREE 04 Heures

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats*

*L'utilisation d'une calculatrice non programmable est autorisée.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies*

### EXERCICE 1

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = 8+8i$$

$$z_2 = i\frac{\sqrt{3}}{2}z_1$$

$$z_3 = i\frac{\sqrt{3}}{2}z_2......etc..$$

$$z_{n+1} = i\frac{\sqrt{3}}{2}z_n ; n \in IN^*$$

**1-** Soit $M_1, M_2, M_3, ......, M_n$ les points d'affixes respectives $z_1, z_2, z_3, ....., z_n$ dans le plan complexe de repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Calculer $z_2, z_3, ....jusqu'à\ z_6$, puis placer sur une figure les points $M_1, M_2, M_3, ......, M_6$ (unité graphique : 1cm).

**2-** a- Calculer $|z_{n+1}|$ en fonction de $|z_n|$

b- En déduire que la suite $(u_n)$ définie sur $IN^*$ par $u_n = |z_n|$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

**3-** Exprimer $u_n$ en fonction de n.

**4-** Chercher à partir de quelle valeur de n dans $IN^*$ les points $M_n$ se situent à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1 ?

EXERCICE 2 (Les parties A et B sont indépendantes)

**Partie A** Un institut de surveillance sanitaire a publié pendant un an des bulletins hebdomadaires relatifs à l'épidémie du chikungunya sur l'île de La Réunion.

Le tableau ci-dessous indique le nombre $n$ estimé de personnes nouvellement contaminées par semaine entre le 13 février et le 2 avril 2006.

| Numéro de la semaine $x_i$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de personnes $n_i$ nouvellement contaminées | 23 850 | 16 650 | 11 620 | 8 100 | 5 660 | 3 950 | 2 750 |

1. Le tracé du nuage de points $M_i$ de coordonnées $(x_i ; n_i)$ montre qu'un ajustement affine n'est pas judicieux. On choisit un changement de variable $y_i = \ln(n_i)$ pour obtenir un ajustement affine convenable.

| Numéro de la semaine $x_i$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | | | | | | 8,28 | |

a) Recopier en le complétant le tableau ci-dessus en donnant les résultats arrondis à 0,01 près.

b) Représenter le nuage de points $N_i$ de coordonnées $(x_i ; y_i)$. On prendra comme unités : 1 cm pour 1 semaine en abscisse et 4 cm pour 1 en ordonnée. L'origine du repère aura pour coordonnées $(0; 6)$.

2. On appelle $G$ le point moyen du nuage obtenu.

a) Calculer les coordonnées de $G$. Placer ce point sur le graphique.

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de y en x par la méthode des moindres carrées

c) Calculer le coefficient de corrélation. Que conclure ?

3. En utilisant l'équation obtenue à la question 2. b) :

a) Déterminer le nombre de personnes nouvellement contaminées la semaine numéro 15.

b) Déterminer à partir de quelle semaine, le nombre $n$ de personnes nouvellement contaminées sera inférieur ou égal à 1 000.

**Partie B** Dans le jeu de scrabble, il y a 100 petits carrés représentant chacun une lettre de l'alphabet avec la répartition suivante :

| Lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 9 | 2 | 2 | 3 | 15 | 2 | 2 | 2 | 8 | 1 | 1 | 5 | 3 |

| Lettre | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 6 | 6 | 2 | 1 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**NOTA** Y est considéré comme une voyelle.

1- Le premier joueur choisit au hasard 7 carrés parmi les 100 ; quelle est la probabilité que :

a- il n'ait tiré que des voyelles ;

b- il n'ait que des consonnes ;

c- il n'y ait pas le W parmi les lettres tirées ?

2- Le deuxième joueur tire à son tour 7 carrés parmi les carrés restants.

Sachant que le premier joueur n'a pas tiré le W, quelle est la probabilité que le second joueur ne tire pas non plus ce W ?

On donnera les résultats de cet exercice sous forme exacte ( fractions irréductibles) puis sous forme décimale à $10^{-2}$ près par défaut.

**Problème**

**I-** ***On se propose de résoudre l'équation différentielle :*** $(E) : y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$.

**1-** Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0

**2-** Soit f une fonction dérivable sur IR, telle que f(0) = ln(2), et soit g la fonction définie par l'égalité :

$f(x) = e^{2x} g(x)$.

**a-** Calculer g(0)

**b-** Calculer f '(x) en fonction de g '(x) et de g(x).

**c-** Montrer que f est solution de ( E) si, et seulement si : $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

**d-** En déduire l'expression de g(x), puis celle de f(x) de telle sorte que f soit solution de ( E).

***II-*** ***Etude sur IR de la fonction définie par :*** $f(x) = e^{2x} \ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

**1-** On pose $h(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right) - \frac{1}{e^{2x}+1}$

**a-** Etudier la limite de h en + ∞

**b-** Etudier le sens de variation de h.

**c-** En déduire le signe de h(x) pour tout x réel.

**2-** Calculer f '(x) et montrer que f '(x) est du signe de h(x).

**3-** a- Etudier la limite de f en + ∞

b- Montrer que $f(x)=e^{2x}\left[-2x+\ln\left(1+e^{2x}\right)\right]$

c- En déduire la limite de f en - ∞.

**4-** Dresser le tableau de variation de f

**5-** Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé ( unité : 5cm)

Préciser la tangente de la fonction f au point d'abscisse 0

III-

1- En remarquant que $\dfrac{1}{1+e^{-2x}}=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-2x}}$

2- Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'aire en cm² de la portion du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations x = - 1 et x = 0

*IV-* ***On définie la suite*** $(u_n):\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n);\forall n\geq 0 \end{cases}$

1- Montrer que $f([0;1])\subset[0;1]$ et en déduire par récurrence que pour tout n ≥ 0, $u_n\in[0;1]$

2- Montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est croissante. En déduire qu'elle est convergente.