

Correction + Barème Bac BLANC février 2019 UP Cocody 3

EXERCICE 1

(6p6)

Partie A

1-a) Supposons que a et b sont de même parité.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) :$$

S'ils sont tous les deux pairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;

s'ils sont tous les deux impairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;

Réciproquement

Supposons que $a^2 - b^2$ pair.On a : $a^2 - b^2 = 2k$, avec k entier naturel. $(a-b)(a+b) = 2k \Rightarrow 2 \text{ divise } (a-b)(a+b)$. Comme 2 est un nombre premier, donc 2 divise $a-b$ ou 2 divise $a+b$. Donc $a-b$ est pair ou $a+b$ est pair.Ainsi, a et b sont de même parité.b) Comme m est impair, a et b n'ont pas la même parité. En utilisant 1-a).2) $m = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = pq$. Avec $p=a-b$ et $q=a+b$

Comme il a été dit, pour que le produit soit impair, il faut qu'ils n'aient pas la même parité.

 p et q ne sont pas de même parité. Sinon m serait pair. Ce qui est absurde.

Partie B

1. a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$x^2 - 1$	8	0	3	8	6	6	8	3	0

b) $x^2 \equiv 1[9] \Leftrightarrow x \equiv 1[9] \text{ ou } x \equiv 8[9]$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}$ est $S = \{1 + 9k; 8 + 9k / k \in \mathbb{N}\}$.2-a) On a $250\,507 = 27\,834 \cdot 9 + 1$, donc les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$ sont ceux de $x^2 - 1$.

Voir tableau 1-a).

Comme $a^2 - 250\,507 = b^2$, les restes doivent être égaux modulo 9, on a $a^2 \equiv (b^2 + 1)[9]$;*si on prend $b \equiv 0[9]$ alors $a^2 \equiv 1[9] \Rightarrow a \equiv 1[9] \text{ ou } a \equiv 8[9]$,*si on prend $b \equiv 1[9]$ alors $a^2 \equiv 2[9]$,*si on prend $b \equiv 2[9]$ alors $a^2 \equiv 5[9]$, etc.Les restes possibles de a^2 par 9 sont : 1 ; 2 ; 5 et 8.

b) En utilisant 2-a)

*si on prend $b \equiv 0[9]$ alors $a^2 \equiv 1[9] \Rightarrow a \equiv 1[9] \text{ ou } a \equiv 8[9]$,*si on prend $b \equiv 1[9]$ alors $a^2 \equiv 2[9]$, ce qui est impossible,*si on prend $b \equiv 2[9]$ alors $a^2 \equiv 5[9]$, ce qui est impossible, etc.Les restes possibles de a par 9 sont : 1 et 8.c) On a $a^2 - 250\,507 = b^2$ d'où $a^2 = 250\,507 + b^2 > 250\,507 = (500, \dots)^2 > 501^2$ donc $a > 501$.Si on avait une solution du type $(501; b)$, on aurait $251001 - 250507 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 494$ or 494 n'est pas un carré parfait. Donc pour tout b , $(501, b)$ n'est pas solution de (E).3-a) a est congru à 1 ou 8 modulo 9 et doit être supérieur à 501.Pour $1+9k > 501 \Rightarrow k \geq 56$.Pour $8+9k > 501 \Rightarrow k \geq 55$.On peut donc prendre $503 = 8(9)$ ou $505 = 1(9)$. Donc $a \equiv 503[9]$ ou $a \equiv 505[9]$.

b) On fait quelques essais

a	$a^2 - 250507$	$\sqrt{a^2 - 250507}$
505	4518	67,2160695
514	13689	117
577	822422	287,09272

On a donc la première solution pour $k = 1$, ce qui donne la solution $(514, 117)$.c) On a : $250507 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (514-117)(514+117) = 397 \times 631$.

EXERCICE 2

1) $(E_0) = (D) \cup (D')$... avec (D) et (D') les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=-3$ 0,5

$(E_1) = \emptyset$ car pour $m=1$, on a : $3y^2+4=0$ 0,5

2-a) pour $m \neq 0$ et $m \neq 1$

On a : $M(x,y) \in (E_m) \Leftrightarrow (m-1)[x^2 + 2x] + 3my^2 + m + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)[(x+1)^2 - 1] + 3my^2 + m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(x+1)^2 - m + 1 + 3my^2 + m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(x+1)^2 + 3my^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0$$

avec $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$. Ainsi, l'équation de (E_m) dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$ est : $(m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0$ 0,75

b) Dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

$$M(X,Y) \in (E_m) \Leftrightarrow X^2 + \frac{3m}{m-1}Y^2 = \frac{-4}{m-1}$$

(E_m) est un cercle si et seulement si $\frac{3m}{m-1} = 1$ et $m-1 < 0$. 0,5

$$m = -\frac{1}{2} \text{ et } m < 1$$

Pour $m = -\frac{1}{2}$, l'équation de (E_m) est $X^2 + Y^2 = \frac{8}{3}$.

(E_m) est le cercle de centre O' et de rayon $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. 0,5

c) pour $m < 0$ une équation de (E_m) est $\frac{X^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{1-m}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{-3m}}\right)^2} = 1$ dans $(O', \vec{u}, \vec{v})$. 0,5

(E_m) est une ellipse.

pour $0 < m < 1$, une équation de (E_m) est $\frac{X^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{m}-1}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3m}}\right)^2} = 1$ dans $(O', \vec{u}, \vec{v})$. 0,5

(E_m) est une hyperbole.

3) pour $m=-3$, l'équation de (E_m) est $X^2 + \frac{Y^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$ dans $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

voir annexe. 0,5

PROBLEME :**Partie A**

1-a) $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 2 \ln x + \frac{2x-1}{x} - 1$ 0,25

$\forall x \in]0; +\infty[, g''(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ 0,25

$\forall x \in]0; +\infty[, g''(x) > 0$. Donc g' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. 0,25 + 0,25

b) Sur l'intervalle $]0; +\infty[$: g' est strictement croissante et $g'(1) = 0$.

$\forall x \in]0; 1[, x < 1 \Rightarrow g'(x) < g'(1)$ 0,25

$\forall x \in]1; +\infty[, x > 1 \Rightarrow g'(x) > g'(1)$ 0,25

Ainsi, $\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0 \end{cases}$ 0,25

c) Sur l'intervalle : $]0; +\infty[, 0$ est le minimum de g atteint en 1.

Donc $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, g(x) > 0$ 0,25

2-a) $\forall x \in]0; 1[, u'(x) = \frac{-x^2}{x+1} \Rightarrow u'(x) < 0$. Donc u est strictement croissante 0,25

b) $u(]0; 1[) =]0,5 - \ln 2; 0[\Rightarrow \forall x \in]0; 1[, u(x) < 0$ 0,25

c) $\forall x \in]0; 1[, u(x) < 0 \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1)$ (1) 0,25

Partie B

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} \times (x-1) = 0$ et $f(0)=0$. Donc la droite (OI) est tangente à (C) en O.. 0,5

2-a) On a : $\forall x \in]0; 1[, \frac{2x-x^2}{2} < \ln(x+1) < \frac{x(2x^2-3x+6)}{6}$

$\forall x \in]0; 1[, \frac{6}{x(2x^2-3x+6)} < \frac{1}{\ln(x+1)} < \frac{2}{x(2-x)}$ car $\frac{x(2-x)}{2} > 0$ et $\frac{x(2x^2-3x+6)}{6} > 0$.

$\forall x \in]0; 1[, \frac{6(x+1)}{x(2x^2-3x+6)} - \frac{1}{x} < \frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} < \frac{2(x+1)}{x(2-x)} - \frac{1}{x}$

$\forall x \in]0; 1[, \frac{6(x+1)-2x^2+3x-6}{x(2x^2-3x+6)} < h(x) < \frac{2(x+1)-2+x}{x(2-x)}$

$\forall x \in]0; 1[, \frac{x(9-2x)}{x(2x^2-3x+6)} < h(x) < \frac{3x}{x(2-x)}$

Ainsi, $\forall x \in]0; 1[, \frac{-2x+9}{2x^2-3x+6} < h(x) < \frac{3}{2-x}$

b) On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x+9}{2x^2-3x+6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2-x} = \frac{3}{2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{3}{2}$. 0,5

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x(x-1)}{\ln x} - 1}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(t+1)t}{\ln(t+1)} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t+1}{\ln(t+1)} - \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \frac{3}{2}, \text{ avec } t = x - 1$$

c) $f'_d(1) = f'_g(1) = \frac{3}{2}$ m donc f est dérivable en 1. Une équation de (T) est : $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Partie C

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x-1)} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \frac{1}{x})}{\ln x} = +\infty$$

(C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ)

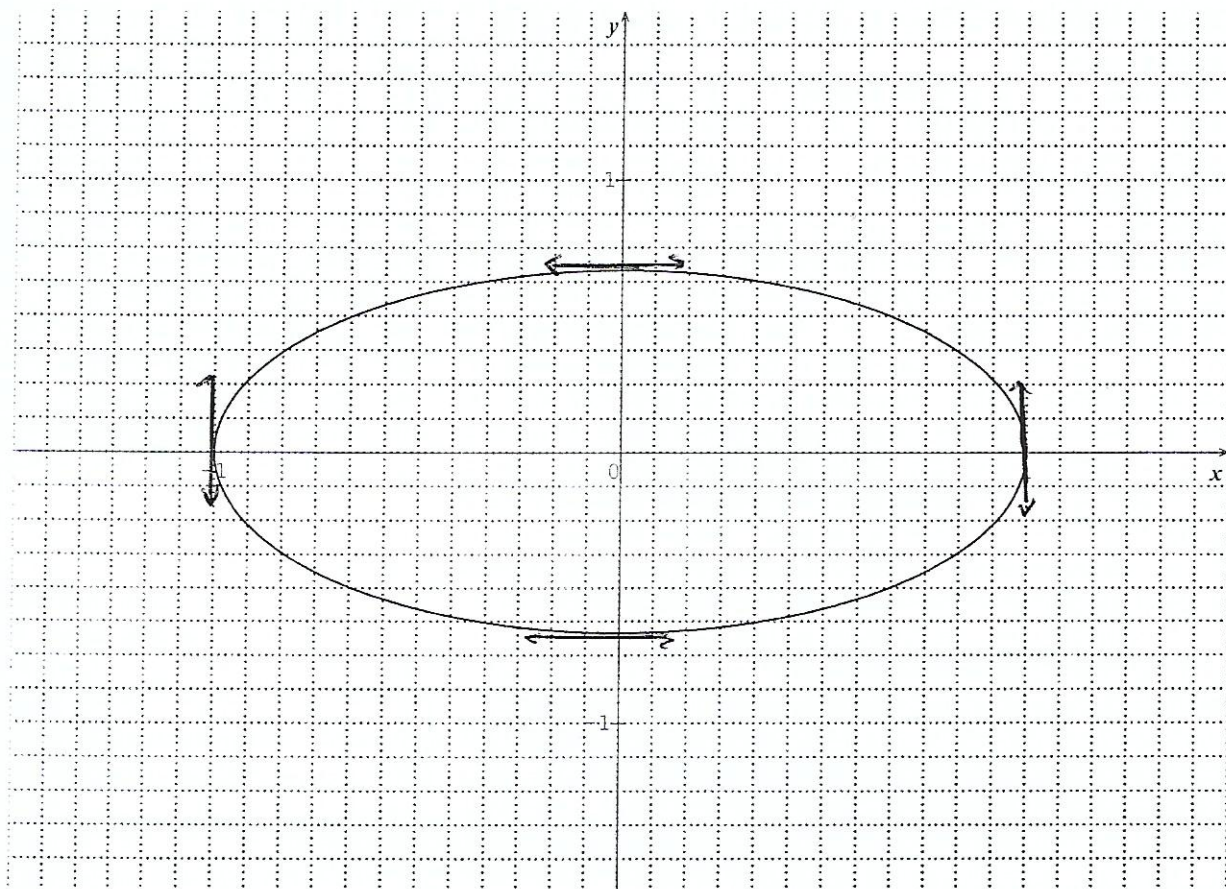
2-a) $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = \frac{(2x-1)\ln x - \frac{x^2-x}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{h(x)}{(\ln x)^2}$

b) Sur $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ la fonction f est strictement croissante.

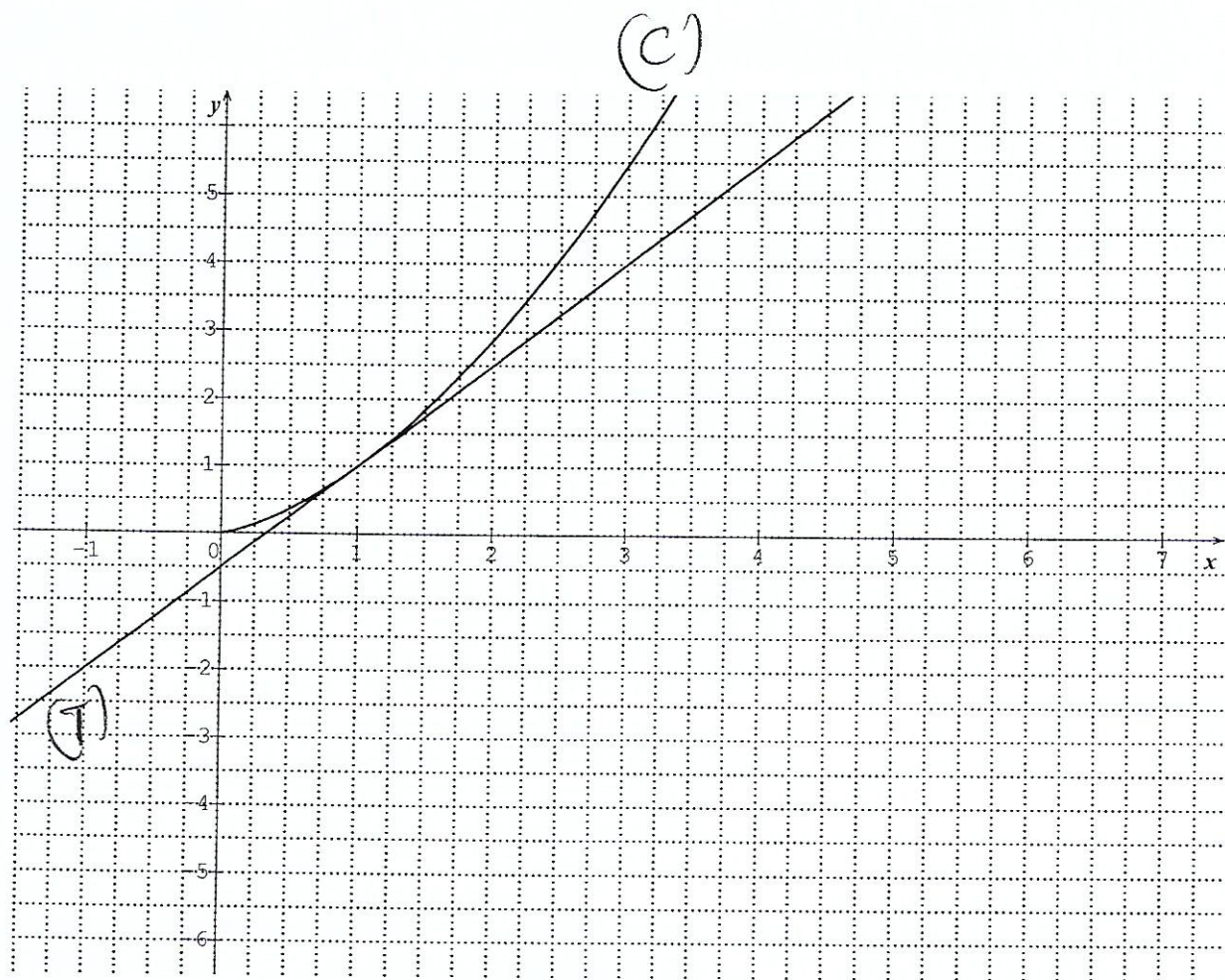
x	0	$+\infty$
$f'(x)$		
f	0	$+\infty$

3) Voir annexe

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$: f est continue et strictement croissante. Donc f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $f([0;+\infty[) = [0;+\infty[$



5



6