

Corrigé Math TD 2019

Exercice 1

Partie A (2,5pts)

$$P(A \cap \bar{I}) = \frac{1}{50}, \quad P(\bar{A} \cap I) = \frac{1}{500}, \quad P(I) = \frac{1}{100}$$

1 a) Calcul de $P(A \cap I)$

$$P(A \cap I) + P(\bar{A} \cap I) = P(I)$$

$$P(A \cap I) = P(I) - P(\bar{A} \cap I) \\ = \frac{1}{100} - \frac{1}{500} = \frac{4}{500}$$

$$P(A \cap I) = \frac{1}{125}$$

$$1. b) \quad P(A) = P(A \cap I) + P(A \cap \bar{I})$$

$$= \frac{4}{500} + \frac{1}{50} = \frac{14}{500}$$

$$P(A) = \frac{7}{250}$$

2. Soit D l'événement "dysfonctionnement du système" = alarme qui sonne en défaut

$$P(D) = P(A \cap I) + P(\bar{A} \cap I)$$

$$= \frac{1}{50} + \frac{1}{500}$$

$$P(D) = \frac{11}{500}$$

3 Calcul de $P_A(I)$

$$P_A(I) = \frac{P(A \cap I)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{500}}{\frac{14}{500}}$$

$$P_A(I) = \frac{2}{7}$$

Partie B (2,5)

La situation journalière dans l'usine est une épreuve de Bernoulli d'issues A et $\bar{A}$.

Une semaine dans l'usine est un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire Y égale au nombre de fois que l'alarme se déclenche suit la loi binomiale de paramètres

$$7 \text{ et } \frac{7}{250}$$

$$P(Y=2) = 0,0001$$

$$1. b. \quad P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) \\ = 1 - \left(\frac{243}{250}\right)^7$$

$$P(Y \geq 1) = 0,180$$

2. Dans cette question, $Y \sim \mathcal{B}(n, \frac{7}{250})$

$$a. \quad P_n = P(Y \geq 1) \\ = 1 - P(Y=0)$$

$$P_n = 1 - \left(\frac{243}{250}\right)^n$$

$$2. b. \quad P_n \geq 0,99$$

$$\left(\frac{243}{250}\right)^n \leq 0,01$$

$$n \ln\left(\frac{243}{250}\right) \leq \ln(0,01)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{243}{250}\right)}$$

$$n \geq 162,15$$

$$n_0 = 163 \text{ jours}$$

EXERCICE 2

1. Résolution de (E): $z^2 - 6z + 12 = 0$

$$\Delta = 36 - 48 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{6 + 2i\sqrt{3}}{2} = 3 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_2 = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{2} = 3 - i\sqrt{3}$$

$$S_E = \{3 + i\sqrt{3}; 3 - i\sqrt{3}\}$$

0,5

2. $u = 3 + i\sqrt{3}$

a) $|u| = 2\sqrt{3} \quad \arg(u) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

0,25 + 0,25

b) $|\bar{u}| = |u| = 2\sqrt{3} \quad \arg(\bar{u}) = -\arg(u) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

0,25 + 0,25

3. $z = \frac{(1+i)^5}{u^4}$

a) $|(1+i)^5| = |1+i|^5 = 2^5 \sqrt{2}$

$$\arg[(1+i)^5] = 5 \arg(1+i) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(1+i)^5 = 2^5 \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$|u^4| = |u|^4 = 12$$

$$\arg(u^4) = 4 \arg(u) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$u^4 = 12 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

0,5

0,25

b) $|z| = \frac{\sqrt{2}}{6} \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\arg(z) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

0,25

$$z = \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

0,5

4. a. placer les points

b. $\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_A} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{(3 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})}{4} = -i\sqrt{3} \in i\mathbb{R}^+$

0,25

$\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_A} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{-1 - i\sqrt{3}} = \frac{(3 - i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})}{4} = i\sqrt{3} \in i\mathbb{R}^+$

0,25

Les triangles OMA et ONA sont des triangles rectangles respectivement

en M et en N.

c. L.A. 2. une droite d'axe réel et imaginaire

PARTIE A

1. a) $g(x) = 3x - x \ln x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x - x \ln x + 1)$$

$$= 1 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (3x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0 \end{cases}$$

0,5

g est donc prolongée par continuité à 0

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

1. b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - x \ln x + 1)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 - \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$= -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \ln x + \frac{1}{x} \right) = -\infty \end{cases}$$

0,5

2. a) Pour $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = 3 - \ln x$

$$3 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq e^3$$

0,5

$$\forall x \in]0, e^3[, g'(x) > 0$$

0,5

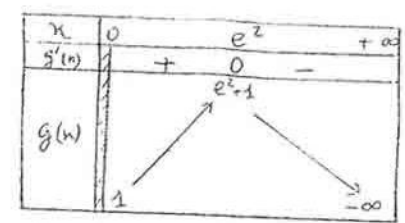
$$\forall x \in [e^3, +\infty[, g'(x) \leq 0$$

2. b. Sens de variation de g

• sur $]0, e^3[$, $g' > 0$ donc g est strictement croissante

0,25

• sur $[e^3, +\infty[$, $g' \leq 0$ donc g est strictement décroissante



0,25

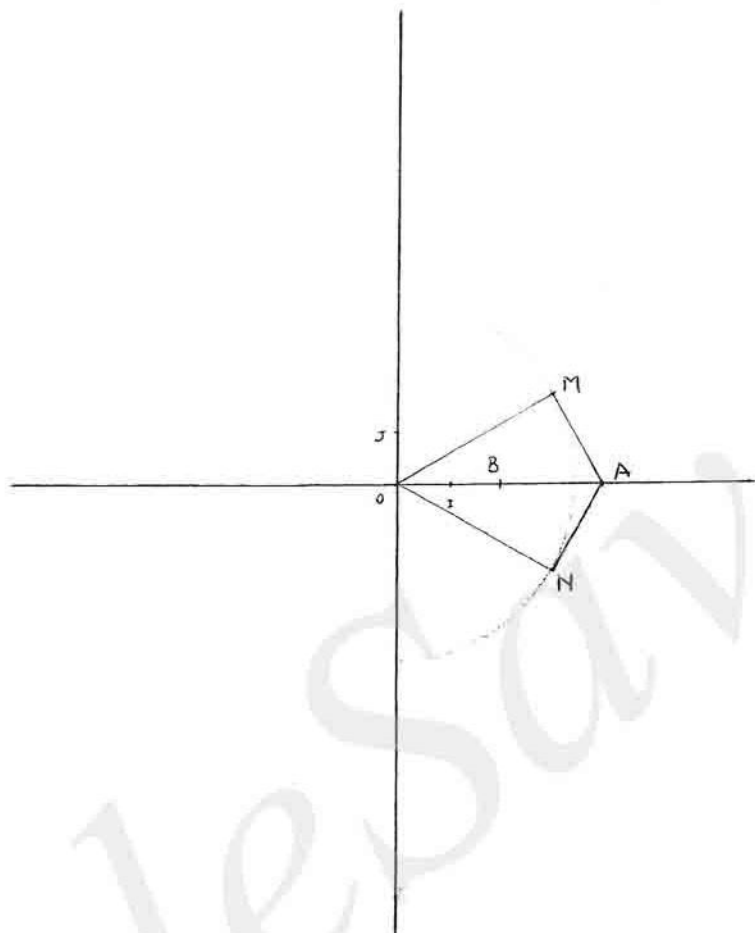
3. • Sur $]0, e^3[$, g est continue et strictement croissante.

$$g(]0, e^3[) =]1, e^2+1[$$

0,5

0 $\notin]1, e^2+1[$ donc $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]0, e^3[$.

Exercice 2.



sur $[e^2; +\infty[$, g est continue et strictement décroissante.

$$g([e^2; +\infty[) =]-\infty; e^2] .$$

$0 \in]-\infty; e^2]$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[e^2; +\infty[$.

En définitive, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} g(2,1) &= 0,06 \\ g(3,1) &= -0,033 \end{aligned} \quad \text{donc } 2,1 < \alpha < 3,1$$

$$4. \quad g([0, e^2]) =]1, e^2] \text{ donc}$$

$$\forall x \in]0, e^2[, \quad g(x) > 0$$

• sur $[e^2; \alpha[$, g est strictement décroissante

$$\text{alors } e^2 \leq x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha) \\ g(\alpha) = 0$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in]0, \alpha[, \quad g(x) > 0$$

• sur $]\alpha; +\infty[$, g est strictement décroissante

$$\begin{aligned} \forall x \in]\alpha; +\infty[, \quad x > \alpha \\ g(x) &< g(\alpha) \\ g(x) &< 0 \end{aligned}$$

PARTIE B

$$f(x) = \frac{2 - \ln x}{x+1}$$

$$1. a. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 2 - \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \end{cases}$$

Interprétation: la droite (OJ) est une asymptote à (C).

$$\begin{aligned} 1. b. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \ln x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$= 0 \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 \end{cases}$$

2. a $f(x) = \frac{2 - \ln x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(x+1) - (2 - \ln x)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x-1 + x \ln x - 2x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{-3x + x \ln x - 1}{x(x+1)^2} = \frac{-g(x)}{x(x+1)^2}$$

2. b. $\forall x \in]0, +\infty[$, $x(x+1)^2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $-g(x)$:

$$\forall x \in]0, \alpha[, g(x) > 0 \text{ donc } f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) < 0 \text{ donc } f'(x) > 0$$

On en déduit que

- sur $]0, \alpha[$ f est strictement décroissante

- sur $]\alpha, +\infty[$ f est strictement croissante

2. c. $f(\alpha) = \frac{2 - \ln \alpha}{\alpha+1}$ or $3\alpha - \ln \alpha + 1 = 0$

$$\ln \alpha = 3\alpha + 1$$

$$\ln \alpha = \frac{3\alpha + 1}{\alpha}$$

donc: $f(\alpha) = \frac{2 - \frac{3\alpha + 1}{\alpha}}{\alpha + 1}$

$$= \frac{2\alpha - 3\alpha - 1}{\alpha(\alpha + 1)}$$

$$= \frac{-\alpha - 1}{\alpha(\alpha + 1)}$$

d'où $f(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}$

2. d

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{\alpha}$	0

3 Positions relatives de (C) et (OI)

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x \geq 0$$

$$\ln x \leq 2$$

$$x \leq e^2$$

$$\bullet \forall x \in]0, e^2[, f(x) > 0$$

$$\bullet \forall x \in]e^2, +\infty[, f(x) < 0$$

$$\bullet f(e^2) = 0$$

Ainsi sur $]0, e^2[$, (C) est au dessus de (OI)

sur $]e^2, +\infty[$, (C) est en dessous de (OI)

(C) coupe (OI) au point d'abscisse e^2

4 Equation de (T)

$$f(1) = 1 \text{ et } f'(1) = -1$$

$$(T) y = -x + 2$$

5.

a) h est continue et strictement décroissante sur $]0, \alpha[$.

h est donc une bijection de $]0, \alpha[$ sur $K = h(]0, \alpha[)$

$$=]-\frac{1}{\alpha}, +\infty[$$

b)

$$h(1) = 1 \Leftrightarrow h^{-1}(1) = 1$$

$$h'(1) = -1 \Leftrightarrow (h^{-1})'(1) = \frac{1}{h'(1)} = -1$$

On en déduit que (C') et (C_h) ont la même tangente

(T) au point d'abscisse 1

Construction de (C_h) et (T) (voir-feuille annexée)

PARTIE C

1. V est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\begin{aligned}V'(x) &= \frac{1}{2}x(2\ln x - 1) + \frac{1}{4}x^2 \times \frac{2}{x} \\&= x\ln x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \\&= x\ln x\end{aligned}$$

$V'(x) = v(x)$ d'où V est une primitive de v sur $]0; +\infty[$.

2. $g(x) = 3x + 1 - v(x)$

$$\begin{aligned}G(x) &= \frac{3}{2}x^2 + x - V(x) + C \\&= \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C \\&= -\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 7) + C\end{aligned}$$

$$G(1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(-7) + C = 0$$
$$C = -\frac{7}{4}$$

$$G(x) = -\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 7) - \frac{7}{4}$$

Problème

