

BACCALAUREAT

Durée : 4 h

SESSION DE REMPLACEMENT 2000

Coefficient : 4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

*Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.**Le candidat recevra 2 feuilles de papier millimétré.**Toute calculatrice scientifique est autorisée.*

Exercice 1

Pour préparer la retraite de ses membres, une coopérative de fonctionnaires ivoiriens a planté en 1991 des anacardiés qui sont rentrés en production trois ans plus tard. Le tableau statistique suivant donne l'évolution des productions depuis la première année de récolte.

Ordre x_i de l'année de production	1	2	3	4	5	6	7
Année de production			1996				
Quantité y_i de production (en tonnes)	118	146	184	247	267	278	255

- 1) En quelle année cette coopérative a-t-elle obtenu 278 tonnes d'anacarde ?
- 2) Recopier et compléter le tableau statistique ci-dessus.
- 3) Représenter dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) , le nuage de points de la série statistique double (x_i, y_i) .
(On prendra sur la droite des abscisses : 2 cm pour unité et sur la droite des ordonnées : 1 cm pour 20 tonnes).
- 4) Déterminer l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire de la distribution statistique (x_i, y_i) .
- 5) La corrélation entre les variables statistiques x et y est-elle bonne ? Justifier.
- 6) Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression qui permet d'estimer l'année en fonction de la production.
- 7) En quelle année la coopérative produira-t-elle 350 tonnes ?

Exercice 2

On considère les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2} (U_n)^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \ln \left(\frac{3}{2} U_n \right).$$

($\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

- 1) Calculer V_0 .
- 2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.
- 3) Exprimer V_n en fonction de n .
- 4) Calculer la limite de (V_n) .
- 5) Exprimer U_n en fonction de V_n et en déduire la limite de (U_n) .
- 6) Pour tout entier naturel non nul n , on pose :
 $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_{n-1}$
 - a) Démontrer que : $S_n = (1 - 2^n) \ln 2$.
 - b) Exprimer T_n en fonction de n .
 - c) Justifier que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$.

Problème

Partie A

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et pour } x > 0: f(x) = -x + x \ln x.$$

($\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . (Unité : 2 cm).

- 1) Calculer $f(1)$ et $f(e)$.
- 2) *Etude des branches infinies.*
 - a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
 - b) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
 - c) Interpréter graphiquement ce résultat.

- 3) *Etude de la dérivabilité de f en 0.*
- Démontrer que f est continue à droite en 0.
 - Etudier la dérivabilité de f en 0.
 - Préciser la tangente à (Γ) en 0.
- 4) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' la dérivée de f .
- Déterminer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.
 - Dresser le tableau de variation de f .
 - Donner une équation de la tangente (D) à (Γ) au point d'abscisse e .
- 5) Construire (D) et (Γ) .
- 6) Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$.
- En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) , la droite (OI) et les droites d'équations $x = t$ et $x = e$.
 - Calculer la limite de $\mathcal{A}(t)$ quand t tend vers 0.

Partie B

On considère la transformation plane T qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z + 1 + 2i$.

On appelle A le point d'affixe $1 - i$ et B le point d'affixe e .

- Calculer les affixes de O' , A' , B' images respectives des points O , A et B par T .
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T .
- Construire la courbe (Γ') , image de (Γ) par T .