BAC Blanc 2005
MATHEMATIQUES
Série : C -- Durée : 4 heures -- coef : 5

Exe®cice 1

Le plan est orienté. ABC est un triangle équilatéral de coté 1 tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

A' désigne le milieu du segment [BC] et G l'isobarycentre des points A, B et C.

1) Construire G et calculer GA'.
2) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$(\Gamma) = \left\{M \in P/ \quad MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5}{4}\right\}$$

$$(\Delta) = \left\{M \in P/ \ 2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -10\right\}$$

$$(E) = \left\{M \in P / \text{Mes}(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MC}) = \frac{-\pi}{3}\right\}$$

Exe®cice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A B et C d'affixes respectives :

$$a = -\sqrt{3} - i \qquad b = 3 - 2i \quad \text{et} \quad c = 5 + 2i$$

1) a. Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a.

   b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

   c. Déterminer et construire les ensembles de points suivants :

$$(\Sigma) = \left\{M(z) \in P/ \quad |z-b| = |z-c|\right\}$$

$$(\Pi) = \left\{M(z) \in P/ \ 2|z-b| = |a|\right\}$$

2) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$$

   Démontrer que g admet un point invariant et un seul Ω

3) Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport 2
   a) Déterminer une écriture complexe de h
   b) K désigne le milieu du segment [BC]
      Déterminer l'affixe du point K' image de K par h
4) Soit r l'application du plan dans lui-même d'expression complexe

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 2 - i) + 2 + i$$

   a. Déterminer l'affixe du point K'' image de K' par r
   b. Démontrer que r est une rotation dont on déterminera les éléments caractéristiques.
5) Déterminer une écriture complexe de h o r et en déduire que g = h o r = r o h .
6) Déterminer et construire les images par g des ensembles (Σ) et (Π).

Problème

Partie A

On considère la fonction numérique f définie sur]0 ; + ∞ [par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2)$$

On désigne par (C)sa représentation graphique dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique $\|\vec{i}\| = 2$ cm).

1) Étudier les limites de f en 0 et en + ∞.
2) On admet que f est dérivable sur]0 ; + ∞ [. Calculer f ' (x)
3) Soit u la fonction définie sur]0 ; + ∞ [par u (x) = ln (x) + x – 3
   a. Etudier les variations de u.
   b. Démontrer que l'équation u (x) = 0 admet une solution unique α dans [2 ;3].
   c. Montrer que : 2.20 < α < 2.21
   d. Déduire de l'étude précédente le signe de u (x) :
4) a. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
   b. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$
   c. En déduire un encadrement de f (α) d'amplitude 10^{-2}
5) Montrer que :
   Si x ∈] 1 ; e² [alors f (x) < 0
   Si x ∈]0 ;1[∪] e² ; + ∞ [alors f (x) > 0
   f (1) = 0 et f (e²) =0
6) Tracer (C)

Partie B

Soit F la primitive de f sur]0 ; + ∞ [qui s'annule pour x= 1 .

On désigne par (Γ) sa représentation graphique relativement au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a .Sans calculer F (x), étudier les variations F sur]0 ; + ∞ [
   b .Déterminer la tangente à (Γ) au point d'abscisses 1.
2) On considère la fonction h définie sur]0 ; + ∞ [par h (x) = x lnx
   a. Sachant que h est dérivable sur]0 ; + ∞ [calculer h'(x)
   b. En déduire une primitive de la fonction ln (logarithme népérienne)
   c. Montrer que pour tout x strictement positif : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$
   d. En déduire l'expression F (x) en fonction de x.
3) Déterminer la limite de F en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.
4) a. Démontrer que pour tout x strictement supérieur à 1,
   $$F(x) = x\ln x\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3$$
   b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$
   c. Dresser le tableau de variation de F.
5) Tracer (Γ) dans le plan précédent.