www.leSavoir.net

BACCALAUREAT **Durée : 4 h**

DEUXIEME SESSION 2006 **Coefficient : 5**

MATHEMATIQUES

SERIE : C

*Cette épreuve comporte **3 pages** numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*
*Le candidat recevra **2 feuilles** de papier millimétré.*
***Toute calculatrice** est autorisée.*

EXERCICE 1

ABC est un triangle équilatéral de côté a et de centre de gravité O. Soit E le symétrique de A par rapport à C. On appelle D le point d'intersection des droites (AO) et (BE).

1) Faire une figure.

2) Démontrer que le triangle ABD est rectangle en B.

3) Démontrer que O est le milieu de [AD].

4) Calculer BD, AD et CD en fonction de a.

5) Déterminer trois nombres réels α, β et γ tels que D soit le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$.

6) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $-MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 = 4a^2$
   a. Démontrer que (Γ) passe par A.
   b. Déterminer et construire (Γ).

EXERCICE 2

Un GVC veut transporter en un seul voyage sa production de cacao conditionnée dans 2120 sacs identiques jusqu'au port d'exportation.
Un grand transporteur a les camions qu'il faut pour répondre aux besoins du GVC. Il propose deux types de camions : des grands camions pouvant contenir 64 sacs au maximum et des petits camions pouvant contenir 45 sacs au maximum.
Le GVC veut connaître les nombres respectifs de camions de chaque type pouvant transporter la totalité de la production.

On désigne par p le nombre de grands camions et par q le nombre de petits camions répondant au problème.

1) Démontrer que le couple (p, q) est solution d'une inéquation dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à préciser.

2) Sur la base des tarifs des camions fixés par le transporteur, le comptable du GVC réalise que, pour minimiser le coût du transport, il est indispensable que tous les camions à affréter soient totalement chargés.
   a) Prouver que le couple (p, q) est alors solution de l'équation :
      (E) : $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $64x + 45y = 2120$.
   b) Vérifier que $(50 ; -24)$ est une solution de l'équation (E).

c) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour démontrer que 64 et 45 sont premiers entre eux.
d) Résoudre (E).

3) Calculer les nombres respectifs de camions de chaque type qui minimisent le coût du transport de la production du GVC.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]1 ; +\infty[, \quad f(x) = 1 + xe^{-\frac{1}{x-1}}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 4 cm sur (OI) et 8 cm sur (OJ)).

1) Calculer la limite de f en $+\infty$.

2) Démontrer que f est dérivable en 1 et préciser le nombre dérivé de f en 1.
(*On pourra faire le changement de variable :* $u = \frac{1}{x-1}$).

3) On admet que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et on note f 'sa fonction dérivée.

a) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $]1;+\infty[$, $f'(x) = \left[1 + \frac{x}{(x-1)^2}\right] e^{\frac{-1}{x-1}}$.

b) Étudier le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Démontrer que pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, $f(x) \geq 1$.

4) Soit φ la fonction dérivable sur $[0;+\infty[$ et définie par : $\varphi(t) = 1 - (1 + t)e^{-t}$.

a) Calculer $\varphi'(t)$.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel positif ou nul t, on a : $0 \leq \varphi'(t) \leq t$.

c) En déduire que, pour tout nombre réel positif ou nul t, on a : $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{t^2}{2}$.

d) Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]1;+\infty[$, on a :

$$x - f(x) = (x-1)\,\varphi\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

e) En déduire que, pour tout nombre réel x appartenant à $]1;+\infty[$, on a :

$$0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}.$$

f) En déduire que la droite (D) d'équation y = x est une asymptote à $(\mathscr{C})$. Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).

5) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{3}{e}x - \frac{4}{e} + 1$ est tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.

b) Soit Ψ la fonction dérivable sur $]1, +\infty[$ et définie par $\Psi(x) = f(x) - \left(\frac{3}{e}x - \frac{4}{e} + 1\right)$.

Calculer $\Psi'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]1 ; +\infty[$.

c) On suppose que la fonction Ψ' est dérivable sur $]1 ; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]1 ; +\infty[$, $\Psi''(x) = \frac{2-x}{(x-1)^4} e^{-\frac{1}{x-1}}$.

d) Étudier les variations de Ψ' puis démontrer que : $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\Psi'(x) \leq 0$.

e) En déduire que :

$$\forall x \in]1 ; 2], \quad \Psi(x) \geq 0 ;$$
$$\forall x \in [2 ; +\infty[, \quad \Psi(x) \leq 0.$$

f) Déduire des questions précédentes la position de la droite (Δ) par rapport à la courbe $(\mathscr{C})$.

6) Construire (D), (Δ) et $(\mathscr{C})$.

Partie B

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1) Déterminer la dérivée F'de F.

2) En déduire le sens de variation de F.

3) Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[1;+\infty[$, on a : $F(x) \geq x-1$.

4) En déduire la limite de F en $+\infty$.