

BACCALAUREAT

Durée : 4 h

DEUXIEME SESSION 2006

Coefficient : 4

MATHEMATIQUES

SERIE : D

Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2 et une feuille annexe à rendre avec la copie.

Le candidat recevra 2 feuilles de papier millimétré.

Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

On a mesuré la hauteur et la circonférence au collet d'un lot de 10 cocotiers âgés de 5 ans. Les résultats obtenus sont les suivants :

Circonférence x_i en cm	14	15	15	17	18	19	20	20	22	23
Hauteur y_i en cm	300	300	320	330	360	350	360	420	360	420

- Représenter graphiquement le nuage de points de couples de coordonnées (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.
- Déterminer les coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ du point moyen G.
- Placer le point G.
- Calculer la variance $V(x)$ de x et la covariance $\text{Cov}(x, y)$ de x et y .
- Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en fonction de x est : $y = ax + b$ où a et b ont pour arrondis respectifs d'ordre 2 les nombres 11,94 et 133,50.
- Tracer (D).
- Selon l'ajustement ainsi réalisé, estimer la hauteur d'un cocotier dont la circonférence au collet est égale à 16 cm ?

EXERCICE 2

La figure de la feuille annexe représente la courbe représentative (C) de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x}$$

- Calculer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation : $y = x$.
- On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2 + U_n}{U_n}$.
 - Utiliser la courbe (C) pour représenter U_1, U_2, U_3 , et U_4 sur l'axe des abscisses (on laissera les traits de construction en pointillés sur le graphique).
 - A partir du graphique, conjecturer la limite de la suite (U_n) .
 - Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

3. On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{-2 + U_n}{1 + U_n}$.
- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$.
 - En déduire une expression de U_n en fonction de n .
 - Calculer la limite de la suite (U_n) .

PROBLEME

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et définie par :

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{x} - \ln x.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .
Unité graphique : 2 cm.

Partie A

- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0 .
- Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.
- Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]0, +\infty[$.
- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- Démontrer que l'équation : $x \in [2, +\infty[, f(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 4,9 et 5.
- Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in]1; \alpha[\\ f(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in]0; 1[\cup]\alpha; +\infty[\\ f(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{1; \alpha\}. \end{aligned}$$
- Exprimer $\ln \alpha$ en fonction de α .
- Tracer (T) et la courbe (C) .

Partie B

- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^\alpha \ln x \, dx$ en fonction de α .
- Calculer, en fonction de α , l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$.

Partie C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0; 2]$.

- Démontrer que g est une bijection de $]0; 2]$ sur l'intervalle $]-\infty; 1 - \ln 2]$.
- Démontrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en 0 puis calculer $(g^{-1})'(0)$.
- Soit (C') la courbe représentative de g^{-1} dans le repère (O, I, J) .
Construire (C') en indiquant la méthode utilisée.