COLLEGE
NOTRE DAME
D'AFRIQUE ABIDJAN

vendredi, 14 mai 2010

Terminale C.

MATHEMATIQUES
DEVOIR SURVEILLE N°6
Durée : 4 h.

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.
A, A', B et B' sont les points d'affixes respectives 1, -1, i et $-$ i.
A tout point M d'affixe z, distinct de O, A, A', B et B', on associe le point M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles M_1BM et M_2AM sont rectangles et isocèles respectivement en M_1 et M_2
et $\left(\widehat{\overrightarrow{M_1B},\ \overrightarrow{M_1M}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{M_2M},\ \overrightarrow{M_2A}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

1. Justifier que : $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$
2. a) Démontrer que $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z+1| = |z+i|$.
   b) Démontrer que : $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1| = |z|\sqrt{2}$.
3. Déduire de ce qui précède, les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral :
   a) A l'aide d'une résolution algébrique.
   b) A l'aide d'une résolution géométrique.
4. Construire, en justifiant la construction, les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral

EXERCICE 2

On considère le triangle ABC rectangle en B tel que : AB=5 cm et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Soit E le milieu du segment [AC].

1. a) Construire le triangle ABC.
   b) Justifier que le triangle AEB est équilatéral.
   c) Démontre qu'il existe une rotation r transformant B en C et A en E.
   d) Déterminer l'angle de la rotation r.
   e) Construire son centre O.
2. Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en E.
   On note J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE.
   a) Déterminer l'angle et le rapport de S.
   b) Démontrer que S(A) = J.
3. Soit k un nombre réel non nul. M et M' deux points du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}$.
   a) Construire les points M et M' pour $k = \frac{3}{2}$.
   b) Démontrer que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs $(k-1)$ et $(-k)$.
   c) Démontrer que r(M) = M' et en déduire que le triangle OMM' est équilatéral.
   d) Démontrer que les points O, A, M et M' sont cocycliques.
4. Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.
   a) Démontrer que S(M) = N.
   b) Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB).

Tournez la page s.v.p.

PROBLEME

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et définie par : $f(x)=\frac{1}{2}x-1+\frac{2\ln x}{x}$.
et on note ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (unité graphique : 2 cm).

Partie A

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et définie par : $u(x)=x^2+4-4\ln x$.

1. Etudier les variations de u.
2. Justifier que : $\forall x\in\,]0;+\infty[,\ u(x)>0$.

Partie B

1. Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{2}x-1$ est asymptote à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.

3. a) Vérifier que : $\forall x\in\,]0;\ +\infty[, f'(x)=\frac{u(x)}{2x^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. a) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution α tel que $1<\alpha<e$.
   b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

5. a) Démontrer qu'il existe un unique point A de ($\mathscr{C}$) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
   b) Donner les coordonnées du point A.

6. a) Etudier la position relative de (D) par rapport à ($\mathscr{C}$).
   b) Construire (T), (D) et ($\mathscr{C}$).

Partie C

On considère la suite numérique (a_n) définie pour tout entier $n\geq 1$ par : $a_n=\int_{e^{n-1}}^{e^n}\frac{2\ln t}{t}\,dt$.

1. a) Hachurer sur le graphique le domaine du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à a_1.
   b) Interpréter graphiquement le nombre a_n.
   c) Calculer a_n puis étudier la convergence de la suite (a_n).

2. Justifier que : $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=n^2$.
