

**BACCALAURÉAT**  
**SESSION 2014**

**Coefficient : 4**  
**Durée : 4 h**

# MATHÉMATIQUES

## SÉRIE D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*

*Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.*

*Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.*

*Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.*

### EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On note B et C les points du plan d'affixes respectives  $3 - 2i$  et  $5 + i$ . On désigne par  $\mathcal{S}$  la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

- 1-
  - a) Démontrer que l'écriture complexe de  $\mathcal{S}$  est :  $z' = \frac{1}{2}(1 - i)z$ .
  - b) Déterminer les éléments caractéristiques de  $\mathcal{S}$ .
  - c) Déterminer l'affixe du point D qui a pour image le point C par  $\mathcal{S}$ .
  
- 2-
  - a) Justifier que l'affixe  $z_1$  du point  $B_1$ , image de B par  $\mathcal{S}$  est  $\frac{1}{2}(1 - 5i)$ .
  - b) Justifier que le triangle  $OBB_1$  est rectangle et isocèle en  $B_1$ .
  
- 3- On définit les points suivants :  $B_0 = B$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \mathcal{S}(B_n)$ .  
On note :  $z_n$  l'affixe de  $B_n$ .
  - a) Démontrer par récurrence que :
 
$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - i)^n z_0.$$
  - b) Calculer la distance  $OB_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} OB_n$ .

## EXERCICE 2

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le Ministère du Plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Années	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

- 1- Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique : 1 cm).

On prendra pour origine du graphique le point  $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix}$ .

- 2- Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique (X, Y).

- 3- Justifier que :

a) la variance de X est  $\frac{20}{3}$  ;

b) la covariance de X et Y est  $\frac{44}{3}$ .

- 4- a) Sachant que la variance de Y est égale à  $\frac{98}{3}$ , déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

b) Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

- 5- Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

a) Déterminer une équation de (D).

b) Tracer (D).

- 6- On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes. Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

## PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

### Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x + (ax + b)e^{-x}$  où a et b sont des nombres réels. Dans le plan muni du repère (O, I, J), on désigne par :

(C) la courbe représentative de g ;

(D) la droite d'équation  $y = x$ .

- 1- a) On donne :  $g(0) = 1$ . Déterminer la valeur de b.

b) On admet que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D).

Déterminer la valeur de a.

- 2- Soit  $h$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = e^x - x$ .
- Soit  $h'$  la fonction dérivée de  $h$ .  
Calculer  $h'(x)$ , pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $h$ .  
*On ne calculera pas les limites de  $h$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .*
  - En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$ .

### Partie B

Soit  $f$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + (x + 1)e^{-x}$ .

- Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
  - Justifier que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ .
  - Donner une interprétation graphique de ces résultats.
- Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - Démontrer que (D) est asymptote à  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$ .
  - Etudier les positions relatives de  $(\mathcal{C})$  et (D).
- On désigne par  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .  
Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} h(x)$ .
  - Déterminer le sens de variation de  $f$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Construire sur le même graphique (T), (D) et  $(\mathcal{C})$ .
- Démontrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - On note  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$ .  
Calculer  $(f^{-1})'(1)$ .
  - Construire  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  sur le même graphique que  $(\mathcal{C})$ .

### Partie C

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^n (t+1)e^{-t} dt$ .

- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-2 - n)e^{-n} + e$ .
- Calculer l'aire  $\mathcal{A}_n$  en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite (D) et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = n$ .
- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$ .