

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Exercice 1 (4 pts)

On considère la suite numérique u définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n} \end{cases}$$

1°) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x}$.

- Etudier rapidement la fonction f et construire sa courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 à l'aide de la courbe (C_f) et de la droite (D) d'équation $y=x$.
- Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite u ?

2°) a) Démontrer que $f([1 ; 5]) \subset [1 ; 5]$.

b) En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 5.$$

3°) Soit v la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$.

- Démontrer que v est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3^n}\right)$.

4°) a) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n .

b) En déduire la limite de la suite u .

Exercice 2 (4 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2cm.

1°) On considère l'équation :

$$(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i = 0.$$

Vérifier que $z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i = (z+2)[z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i)]$

2°) a) Déterminer les racines carrées de $-8-6i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_1) : z \in \mathbb{C}, z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i) = 0$

c) En déduire les solutions de l'équation (E) .

3°) Soient A, B et C les points d'affixes respectives -2 ; $4i$ et $2-2i$.

- Faire une figure.
- Soit K le milieu de [BC]. On considère la similitude directe S de centre A, qui transforme B en K. Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) de diamètre [AB] par la similitude S.
- Déterminer l'écriture complexe de S.
- Déterminer l'angle orienté et le rapport de S.

Problème (12 pts)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On se propose de chercher les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E) : $f'(x) + 2f(x) = 2x - 1$.

1°) Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = x - 1$ est solution de (E).

2°) Soit (E') l'équation différentielle : $f'(x) + 2f(x) = 0$.

- Résoudre (E')
- Soit k un nombre réel. Démontrer que les fonctions $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1$ sont solutions de (E).

3°) a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est solution de (E) alors f-g est solution de (E')

- En déduire les solutions de (E).

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2x} + x - 1$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, I, J), d'unité graphique 3cm.

1°) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$

- Déterminer la limite lorsque x tend vers $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$
- Interpréter graphiquement les résultats précédents

2°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
- Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3°) a) Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$

- Etudier le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f

4°) a) Démontrer que l'équation : $x \in \left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty \right[$, $f(x)=0$ admet une solution unique α .

b) Démontrer que $\alpha \in]0,79 ; 0,80[$.

c) Construire (C) et (D)

5°) Soit t un nombre réel supérieur à α .

a) Calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=t$ et $x=\alpha$.

b) Exprimer la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $A(t)$ en fonction de α .