

Lycée moderne 2 de Grand Bassam

Année scolaire : 2013 – 2014

MATHÉMATIQUES

Devoir surveillé — — — Classe : T^{1e} C — — — Durée : 02 h 30

Exercice 1

- Déterminer l'ensemble $\mathbb{P}$ des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.
- Démontrer que pour tout entier relatif n , les nombres $n+2$ et n^2+3n-1 sont premiers entre eux.
- Déterminer l'ensemble $\mathbb{H}$ des entiers relatifs n différent de -2 tels que $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

Exercice 2

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b \ln(x)}{x}$$

a et b sont deux nombres réels. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- Sachant que (C) passe par le point $B(1; 2)$ et admet en ce point un maximum relatif, déterminer les réels a et b .
- Dans la suite, on prendra pour a et b la valeur 2 de sorte que :

$$f(x) = \frac{2 + 2 \ln(x)}{x}$$

- Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- Interpréter géométriquement ces limites.
- Calculer $f'(x)$ pour tout réel strictement positif.
 - Etudier son signe et en déduire le sens de variation de f .
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$ telle que $0,4 < \alpha < 0,5$.
 - De même, démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une

unique solution β sur $]1; +\infty[$.

c) Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

d) Déterminer un encadrement de β à 10^{-2} près.

5) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.

6) Tracer (C) .

Exercice 3

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm)

On considère le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$, le point B tel que triangle OAB soit équilatéral direct et le point Q isobarycentre des points O et B . On désigne par b et q respectivement les affixes des points B et Q .

1) a- Donner une interprétation géométrique du module et de l'argument du nombre complexe $\frac{b}{a}$.

b- Déterminer l'expression exponentielle de $\frac{b}{a}$ puis en déduire l'affixe, b , de B .

2) Démontrer que Q a pour affixe $2 + i\sqrt{3}$.

3) a- Déterminer l'affixe z_K du point K tel que le quadrilatère $ABQK$ soit un parallélogramme.

b- Démontrer que $\frac{z_K - a}{z_K}$ est un imaginaire pur, Interpréter géométriquement un argument de $\frac{z_K - a}{z_K}$ et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OK}; \overrightarrow{AK})$.

c- Démontrer que le quadrilatère $OKAQ$ est un rectangle.

d- Placer les points A, B, Q et K dans le plan.

4) Soit C le point d'affixe $c = \frac{2a}{3}$.

a- Calculer $\frac{z_K - b}{z_K - c}$.

b- Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CK}; \overrightarrow{BK})$ et en déduire que les points B, C et K sont alignés.

c- Placer le point C dans le plan.