

TREICHVILLE  
Prof: M. Toure

TD<sub>2</sub>

## DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

Série D

DURÉE : 2 heures

### EXERCICE :

Soient  $z_1$  et  $z_2$  les nombres complexes définis par :  $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

On donne  $Z_1 = \frac{z_1}{z_2}$  et  $Z_2 = z_2^{2014}$

- 1) a)-Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$   
 b)-En déduire la forme trigonométrique de  $z_2$
- 2) a)-Déterminer le module et un argument de  $Z_1$   
 b)-Ecrire  $Z_1$  sous forme algébrique.  
 c)-En déduire la valeur exacte de  $\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$  et de  $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ .
- 3) Ecris  $Z_2$  sous forme algébrique.

### PROBLEME :

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = x + \frac{x + \ln|x|}{x^2}$  et  $(C_f)$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

### PARTIE A

Soit la fonction numérique  $g$  définie par  $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln|x|$

- 1) a)-Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$  de  $g$ .  
 b)-Calculer les limites aux bornes de  $D_g$ .  
 c)-Etudier le sens de variation de  $g$  ; puis établir le tableau de variation de  $g$ .
- 2) a)-Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ . Vérifier que :  $-1,3 < \alpha < -1,2$ .  
 b)-Montrer que :  $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; \alpha[ , & g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[ , & g(x) > 0. \end{cases}$

### PARTIE B

- 1) a)-Déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$ .  
 b)-Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .  
 c)-Montrer que les droites (OJ) et  $(\Delta) : y = x$  sont asymptotes à la courbe de  $f$ .
- 2) Soit la fonction numérique  $h$  définie par :  $h(x) = x + \ln|x|$   
 a)-Etudier les variations de  $h$  puis dresser son tableau de variation.  
 b)-En déduire que  $(\Delta)$  et  $(C_f)$  se coupent en un unique point d'abscisse  $\beta$  tel que :  

$$0,56 < \beta < 0,57.$$
  
 c)-Etudier la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(\Delta)$ .
- 3) a)-Montrer que :  $\forall x \in D_f ; f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$ .  
 b)-En déduire les variations de  $f$   
 c)-Construire  $(\Delta)$  et  $(C_f)$ . On prendra  $\alpha = -1,25$ .

### PARTIE C

Soit  $\varphi$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

- 1) Montrer que  $\varphi$  réalise une bijection de  $]0 ; +\infty[$  vers un intervalle  $K$  à déterminer
- 2) On pose  $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + \ln(x)$ .  
 a)-Calculer  $p(1)$ .  
 b)-Déterminer  $\varphi^{-1}(2)$   
 c)-  $\varphi^{-1}$  est-elle dérivable en 2 ? Si oui, calculer  $(\varphi^{-1})'(2)$ .  
 d)-Etablir une équation de la tangente à la courbe de  $\varphi^{-1}$  au point d'abscisse 2  
 e)-Construire les courbes de  $\varphi$  et de  $\varphi^{-1}$  dans le même repère que  $(C_f)$