BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2015 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Dans un quartier d'affaires d'une ville, la Mairie a créé des parkings payants pour les véhicules. Le prix du stationnement dans ces parkings est de 2 000 F par jour. Par ailleurs le stationnement en tout autre endroit est interdit et l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 5 000 F.
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

Pour encourager les automobilistes à utiliser ses parkings, la Mairie organise, dans le cadre d'une promotion, une loterie. Cette loterie est constituée de dix tickets identiques disposés dans une urne dont deux sont gagnants.
Chaque automobiliste qui désire se garer dans un des parkings, effectue le tirage d'un ticket, note le résultat, le remet dans l'urne puis effectue le deuxième tirage.

- Si les deux tickets tirés sont gagnants alors le client stationne gratuitement.
- Si un seul des deux tickets tirés est gagnant alors le client stationne à 1 000 F.
- Si aucun des deux tickets tirés n'est gagnant alors le client stationne à 2 000 F.

Un automobiliste se présente et effectue les deux tirages.

1. Calculer la probabilité de stationner gratuitement.
2. Justifier que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est égale à $\frac{8}{25}$.
3. Calculer la probabilité de payer au moins 1 000 F pour le stationnement.

Partie II

La probabilité pour un automobiliste d'être interpellé par la Police Municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors à payer l'amende est égale à $\frac{4}{5}$.

Un automobiliste se gare n fois en stationnement interdit. Les risques d'amende sont indépendants d'un stationnement interdit à l'autre.

1. *a*) Calculer la probabilité q_n de payer l'amende au plus une fois.

   b) Démontrer que la probabilité P_n qu'il paye au moins une fois l'amende est $P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$.

   c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $P_n \geq 0{,}99$.

2. Monsieur Riko, exerçant dans ce quartier, paye en moyenne 4800 F pour trois jours de stationnement par semaine dans les parkings payants. Il estime que les stationnements payants lui reviennent trop chers et prend le risque de se garer en stationnement interdit trois fois dans la semaine. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant total des amendes qu'il peut payer dans la semaine.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Monsieur Riko a-t-il intérêt à se garer en stationnement interdit ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Partie I

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.
On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$; $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} + 2i$.

1. *a*) Calculer le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$ où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.

b) En déduire que le triangle OAB est équilatéral.

2. On note P et Q les milieux respectifs des segments [OB] et [AB].
r est la rotation de centre J d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

On pose : $f = t \circ r$.

a) Déterminer l'image par f du point O.

b) Démontrer que f est une rotation dont on donnera l'angle.

c) Construire le centre K de f.

Partie II

1. Soit M un point du plan d'affixe z. On pose : $z = x + iy$, où x et y des nombres réels.
On note H le point d'affixe $x + 3i$.
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $2|z| = |y - 3|$.

a) Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$.

b) Justifier que (Γ) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice (D) associée.

c) Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

d) Préciser les coordonnées du centre Ω de (Γ) et les coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

e) Tracer (Γ).

2. Soit (Γ') est l'image de (Γ) par f.

a) Démontrer que (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$.

b) Préciser un foyer et la directrice associée.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 10 cm.
On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$\begin{cases} f(x) = (e^{-x^2} - 1)\ln x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J).
On se propose dans ce problème de trouver un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$.

Partie A

On considère les fonctions h et g dérivables et définies sur $]0\,;+\infty[$ par :
$h(x) = \ln x + e^x + 1$ et $g(x) = x\ln x + e^x - 1$.
On admet qu'il existe un nombre réel $\alpha \in]0\,;1[$ tel que :
$\begin{cases} \forall x \in]0, \alpha[, h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, h(x) > 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Justifier que : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = h(x)$.

3. *a*) Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   b) Dresser le tableau de variation de g.
4. *a*) Démontrer que l'équation : $x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique β.
   b) Justifier que : $\beta \in]0{,}3\,;0{,}4[$.
   c) Démontrer que :
   $\forall x \in]0\,;\beta[$, $g(x) < 0$; $\forall x \in]\beta\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1. Démontrer que f est continue en 0.

2. Justifier que f est dérivable en 0.
3. *a*) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   c) Donner une interprétation graphique des résultats des limites des questions *a*) et *b*).

4. On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
   a) Démontrer que : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{e^{-x^2}}{x}\,g(x^2)$.
   b) Déterminer les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.

5. *a*) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
   b) Tracer $(\mathscr{C})$ et (T) dans le plan muni du repère (O, I, J).
   On prendra $\beta = 0{,}31$.

Partie C

1. Sachant que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

   a) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, -1 \leq -e^{-x} \leq -1 + x$.

   b) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \; 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

2. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ;1]$.
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; I_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x dx.$$

   a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n(t)$.

   b) Démontrer que :

$$\forall t \in]0 ; 1], \; -I_2(t) + \frac{1}{2} I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t).$$

3. On pose : $S = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

   a) Donner une interprétation géométrique de S.

   b) On admet que : $\displaystyle\lim_{t \to 0} \int_t^1 f(x)dx = S$.

   Déterminer un encadrement de S.