

Lycée de Garçons Gnaléga
Mémé de Bingerville

DEVOIR COMMUN N° 1
MATHÉMATIQUES

ANNÉE SCOLAIRE : 2014-2015
DURÉE : 4 H00 min.

Tle D

Exercice 1 : (5 pts)

- Soient F et f deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
 $F(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x - 1$ et $f(x) = 6(2x + 1)^2$.
Justifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer l'ensemble des primitives de f sur K , dans chacun des cas suivants :
 - $f(x) = 2x + x^3 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $K \in]0; +\infty[$.
 - $f(x) = \frac{6x^3 + 3x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$; $K = \mathbb{R}$.
 - $f(x) = 2x \cos\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$; $K = \mathbb{R}$.
 - $f(x) = 2 \sin 3x \cos 3x$; $K = \mathbb{R}$.

Exercice 2 : (4 pts)

Un bassin contient trente six poissons dont 10 carpes, 15 machoirons et 11 saules. On pêche cinq poissons d'un seul coup de filet.

- Quel est l'univers lié à cette expérience ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir 5 carpes ?
- Calculer la probabilité de n'obtenir aucune carpe.
- Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une carpe.
- Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux carpes.
- Calculer la probabilité qu'il y ait une carpe, deux machoirons et deux saules.

Problème (11 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x + \sqrt{|x^2 - 4|})$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm.

- Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ et étudier le signe de $x^2 - 4$ sur $\mathbb{R}$.
 - En déduire que : $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, $f(x) = 3x + 3\sqrt{x^2 - 4}$ et $\forall x \in [-2; 2]$, $f(x) = 3x + 3\sqrt{4 - x^2}$.
 - Etudier la continuité de f en -2 et 2 .
 - Etudier la dérivabilité de f en -2 et 2 . En déduire le domaine de dérivabilité et les interprétations graphiques des résultats.
- Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
 - Démontrer que $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) = \frac{3(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4}}$.
 - Démontrer que l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 - 4} < 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $]-\infty; -2[$.
 - En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty; -2[$ et le signe de $f'(x)$ sur $]2; +\infty[$.
- Démontrer que $\forall x \in [-2; 2]$, $f'(x) = \frac{3(\sqrt{4 - x^2} - x)}{\sqrt{4 - x^2}}$.
 - Démontrer que l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{4 - x^2} - x \leq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[\sqrt{2}; 2]$. (voir que la solution $-\sqrt{2} \notin [0; +\infty[$).

- c. En déduire les signes de $f'(x)$ sur $] -2; 2[$.
 - d. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
4.
 - a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.
 - b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 6x]$ et interpréter graphiquement ce résultat.
5. Construire avec soin, les tangentes à (C_f) en -2 ; 2 ; et $\sqrt{2}$; les asymptotes à (C_f) et la courbe (C_f) .
6. Soit h la restriction de f à $[2; +\infty[$.
 - a. Montrer que h réalise une bijection de $[2; +\infty[$ sur un intervalle K à déterminer.
 - b. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Donner le tableau de variation de h^{-1} .
 - c. Calculer $h(\sqrt{5})$ et justifier que h^{-1} est dérivable en $3 + 3\sqrt{5}$.
 - d. Calculer la valeur exacte de $(h^{-1})'(3 + 3\sqrt{5})$.
 - e. Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère précédent.