

Lycée de Garçons Gnaléga
Mémé de Bingerville

DEVOIR COMMUN N° 2
MATHÉMATIQUES - TD

ANNÉE SCOLAIRE : 2014-2015
DURÉE : 3 H00 min.

Exercice 1 :

On considère la fonction rationnelle f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x+7}{(3x+2)^2}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1. a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
b. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de l'ensemble de définition.
2. a. Démontrer que pour tout x , élément de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, $f'(x) = \frac{-15x-32}{(3x+2)^3}$.
b. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f pour tout x , élément de D_f .
3. a. Démontrer que (C_f) admet un unique point d'intersection avec (OI) et préciser l'abscisse de ce point.
b. Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $-\frac{7}{5}$.
4. a. Justifier que pour tout x différent de $-\frac{2}{3}$, $f(x) = \frac{5}{3(3x+2)} + \frac{11}{3(3x+2)^2}$.
b. En déduire une primitive F de f sur $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$.
c. En déduire la primitive qui prend pour valeur 2 en O .

Exercice 2 :

Une loterie met en vente des billets numérotés de 1 à 100. La règle du jeu est la suivante :

- Tous les billets terminés par 0 ou 5 gagnent chacun 5 000 F.
- Tous les billets terminés par 3 ; 6 ; 9 gagnent 2 000 F.
- Tous les autres ne gagnent rien.

1. Un client achète un seul billet. On suppose que chaque billet a la même chance d'être choisi.
 - a. Quelle est la probabilité pour que ce client gagne 2 000 F ?
 - b. Quelle est la probabilité pour que ce client gagne 5 000 F ?
 - c. Soit X la variable aléatoire qui à chaque billet tiré associe le gain du client.
Établir la loi de probabilité de X .
Calculer l'espérance mathématique de X , la variance et l'écart type.
2. Ayant constaté qu'il y avait trop de gagnants, le Directeur décide de retirer de la vente un certain nombre n de billets terminés par 0 ou 5, avec $0 < n < 20$. Un client choisit un billet parmi ceux restants.
Soit X_n la variance aléatoire qui, à chaque billet choisi, associe le gain réalisé.
 - a. Déterminer en fonction de n , l'espérance mathématique X_n .
 - b. En déduire le nombre minimal de billets à retirer pour que $E(X_n) \leq 1000$.
3. Le Directeur retire 15 billets terminés par 0 ou 5. Un client achète trois billets parmi ceux restants.
 - a. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne au moins 2 000 F ?
 - b. Calculer la probabilité pour qu'il gagne 5 000 F.

PROBLEME

Partie A :

On considère la fonction k définie par : $k(x) = \frac{3x^3 + 4}{x}$.

1. a. Quel est l'ensemble de définition de k ?
b. Démontrer que pour tout réel non nul, $k(x) = 3x^2 + \frac{4}{x}$.
2. En déduire une primitive g de la fonction k sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $g(1) = -3$.
3. Soit la fonction g de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3 - 4 + 4\ln x$.
 - a. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
 - b. Etudier les variations de g et dresser le tableau de variation.
 - c. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [1; 2]$ tel que $g(\alpha) = 0$. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
 - d. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2 cm). Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f définie de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4\ln x}{x}$.

1. a. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b. En déduire une équation de l'asymptote verticale à (C_f) .
c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.
2. a. Démontrer que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b. En déduire les variations de f et dresser le tableau de variation.
3. Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{2}$.
 - a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection P des courbes (C_f) et (Γ) .
 - b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x^2}{2} \right]$ et donner une interprétation graphique du résultat.
 - c. Etudier les positions relatives des courbes (C_f) et (Γ) .
4. Construire les courbes (C_f) et (Γ) pour $x > 0$.
5. a. Démontrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.
b. f^{-1} désigne la bijection réciproque de f . Dresser le tableau de variation de f^{-1} .
c. Donner les caractéristiques de f et f^{-1} ; (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.
d. Construire en bleu sur la même figure précédente, la courbe $(C_{f^{-1}})$.

Partie C :

1. Justifier que $\ln \alpha = \frac{4 - \alpha^3}{4}$.
2. En déduire que $f(\alpha) = \frac{3\alpha^2}{2} - \frac{4}{\alpha}$.