

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

$\forall \alpha \in]1; +\infty[$ et $2,1 < \alpha < 2,2$, on a $g(\alpha) = 0$ et $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1}$, et on désigne par (C) sa représentation graphique.

1) a) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Démontre que pour tout $x \in Df$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$

b) Dresse le tableau de variation de f .

3) On précise $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$$

Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

4) Soit h la restriction de f à $[-2; -1[$

a) Justifie que h est une bijection de $[-2; -1[$ vers un intervalle K à préciser.

b) Donne le sens de variation de h^{-1} et dresse son tableau de variation.

5) Construis (D) et (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

Unité graphique 1cm.

On prendra $\alpha = 2,2$