BACCALAURÉAT BLANC RÉGIONAL **Coefficient : 5**

SESSION : FÉVRIER 2022 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.
Le candidat utilisera deux (02) feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1 *(2points)*

Chaque ligne du tableau comporte une affirmation. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de **V** si l'affirmation est vraie ou **F** si celle-ci est fausse.

Nº	Affirmations
1	ABC est un triangle. L'ensemble des points M du plan tels que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -4$ est un cercle
2	A, B et C sont trois points non alignés du plan et I est le milieu du segment $[BC]$ Le point G tel que : $G = bar\ \{(A; -5); (B; 1); (C; 1)\}$ appartient à la droite (AI)
3	La fonction $x \mapsto \ln(-\ln x)$ est une primitive sur $]0; 1[$de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$
4	Si g est une fonction continue et strictement décroissante sur $[-3\ ; 5]$ telle que $g(-3) = 2$ et $g(5) = -7$ alors l'équation $g(x) = 3$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-3\ ; 5]$.

EXERCICE 2 *(2points)*

Pour chaque énoncé du tableau, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est juste.
Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Enoncés		Réponses
1	L'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$ est	A	$[-4; 2]$
		B	$]-\infty; -4[\ \cup\ ]2; +\infty[$
		C	$]-4; 2[$
2	L'ensemble solution de l'inéquation : $\ln(ex) < \ln(2 - x)$ est	A	$\left]0; \frac{2}{1+e}\right[$
		B	$]0; 2[$
		C	$\left[\frac{2}{e+1}; 2\right[$
3	Si pour tout nombre réel x non nul, $\frac{1}{x} < f(x) - 3 < \frac{x+1}{x^2}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$	A	0
		B	$-\infty$
		C	3
4	ABC est un triangle et G le barycentre des points pondérés $(A; -2), (B; 1)$ et $(C; 3)$. L'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|$ est	A	Un cercle de centre G
		B	La médiatrice du segment $[GA]$
		C	Une droite de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$

EXERCICE 3 *(3points)*

a est un entier naturel strictement supérieur à 1 et n un entier naturel non nul.

1) Soit $x = \overline{11111 \dots 111}^{a} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$ un entier écrit en base a.

   Démontre en utilisant un raisonnement par récurrence que : $x = \frac{a^n - 1}{a-1}$.

2) Détermine l'écriture de l'entier naturel $y = 2^n$-1 (pour $n \geq 2$) en base 2.

3) Soient les entiers $z = \overline{11111}^{2}$ et $t = \overline{1111111111}^{2}$ écrits en base 2.

   a) Ecris z et t dans le système décimal.

   b) Démontre que z divise t.

EXERCICE 4 *(3points)*

Soit u un nombre complexe tel que $u = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

$\bar{u}$ désigne le nombre complexe conjugué de u

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_u): $z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu\bar{u} = 0$

   a) Justifie que le discriminant Δ de (E_u) est égal à $(2u + i\,\bar{u})^2$

   b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_u).

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. Unité : 2cm

On désigne par A, M_1 *et* M_2 les points d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_{M_1} = 2u$ *et* $z_{M_2} = -i\bar{u}$.

Soit (H)l'ensemble des points M d'affixe u tels que les points A, M_1 *et* M_2 sont alignés.

   a) On admet que les points A, M_1 *et* M_2 sont alignés si et seulement si $\frac{z_{M_1} - z_A}{z_{M_2} - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

      Démontre qu'une équation cartésienne de (H) est : $x^2 + 2x - y^2 + y = 0$

   b) Justifie que (H) est une hyperbole dont on précisera l'excentricité, le centre S dans le repère$(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, un sommet et un foyer dans le repère $(S; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

3. Construis (H)

EXERCICE 5 *(5points)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) .Unité graphique : 2cm.

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x\left(\sqrt{e^{\frac{2}{x}}} - 1\right).$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$

1- Calcule la limite de g en $+\infty$.

2-a) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

   b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\frac{ln2}{2}; +\infty[$ tel que $0{,}79 < \alpha < 0{,}80$.

3- Démontre que : $\forall x \in [0; \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$.

PARTIE B

1- On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

a) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}} g(\frac{1}{x})$.

b) Justifie que f est strictement décroissante sur $]0;\frac{1}{\alpha}[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{\alpha};+\infty[$.

2- On admet que pour tout nombre réel u de $[0;1]$, $1+u \leq e^u \leq 1+u+\frac{e}{2}u^2$.

a) Utilise cet encadrement pour démontrer que $\forall\ x \geq 2$, $0 < [f(x)]^2 - 2x \leq 2e$.

b) Déduis-en que : $\forall x \geq 2$, $f(x) \geq \sqrt{2x}$.

c) Calcule la limite de f en $+\infty$.

3- On admet que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Dresse le tableau de variation de f.

4- Trace (C).

EXERCICE 6 *(5points)*

Souleymane, un jeune entrepreneur, décide d'ouvrir une grande boutique de prêt à porter dans la ville de Korhogo. Le financement trouvé, il approche son ancien professeur de mathématique M. Angaman pour des conseils.

M. Agaman pour l'aider, après réflexion, lui remet une feuille sur laquelle il est écrit :

« Construis un bâtiment dallé sur lequel on posera une grande plaque publicitaire qui mettra en valeur les vêtements à vendre. Un lampadaire sera aussi nécessaire pour éclairer la plaque les nuits.

On munit l'espace E où sera implantée la boutique d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Unité : 4 mètres.

La dalle de la boutique est contenue dans le plan (Q) défini par : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -4\alpha - 2\beta - 7 \end{cases}$ où $(\alpha,\beta) \epsilon\ \mathbb{R}^2$

et la plaque publicitaire est contenue dans l'ensemble (S) des points $M(x,y,z)$ de E tel que : $MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 6$ où A , B et C sont des points de coordonnées respectives $(-1;-2;1)$; $(5;0;1)$; et $(1;2;-1)$. Le lampadaire sera placé au point I milieu du segment $[AB]$ ».

Ayant pris connaissance de ces informations, il désire connaitre la distance qui sépare le lampadaire de la droite $(\Delta) = (Q) \cap (S)$, ce qui lui permettra de prévoir la longueur du câble électrique à acheter.

Ne sachant pas exploiter les informations fournies, il te sollicite afin que tu l'aides à calculer cette distance.

En utilisant tes connaissances mathématiques, aide Souleymane à calculer cette distance.