DEVOIR D'UP
Tle **D**

Année scolaire 2021-2022
Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si l'affirmation est fausse. Exemple : **5-VRAI.**

N^o	AFFIRMATIONS
1	Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$
2	Une primitive de la fonction $x \mapsto tanx$ est $\ln(-cosx)$
3	Toute fonction continue sur un intervalle I, est dérivable sur I.
4	La fonction racine $n^{ième}$ est la bijection réciproque de la bijection $f_n: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, x \longmapsto x^n$

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, une seule des trois réponses proposées est juste. Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne reponse.

N^o	AFFIRMATIONS	REPONSES		
		A	B	C
1	Si pour tout nombre réel non nul x, $\sqrt{3} - \frac{1}{x} < f(x) < \frac{1}{x^2} + \sqrt{3}$, alors la limite de f en $+\infty$ est	$+\infty$	$\sqrt{3}$	0
2	La dérivée seconde de la fonction lnx sur $]0;+\infty[$ est	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
3	Soit f une fonction dérivable sur I. Le point $A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si	f'' s'annule en changeant de signe en a	f' s'annule en changeant de signe en a	$f(a)$ est le maximun de f sur I
4	La limite en -1 de la fonction $\frac{sin(x+1)}{\pi x+\pi}$ est	$\frac{1}{\pi}$	π	0

EXERCICE 3 (3.5 points)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

PARTIE A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'événement « le membre choisi est une femme »
- T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis »

1. Démontre que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis, quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

PARTIE B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

a. Détermine la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b. On note p^+ la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives il y est au moins trois membres qui adhèrent à la section tennis parmi les membres choisis.
Démontre que p^+= 0.0837.

2. Pour cette loterie on utilise une urne contenant 100 jetons dont 10 rapportent chacun 20000 francs et les autres ne rapportent rien. Pour jouer à cette loterie, le joueur doit payer 5000 francs puis tirer au hasard et simultanément deux jetons de l'urne. Il reçoit 20000 francs par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5000 francs) réalisé par le joueur lors d'une partie de cette loterie.

a. Détermine la loi de probabilité de X.

b. Calcule l'espérance mathématique de X et interprète le résultat obtenu.

<u>EXERCICE 4</u> (4 points)

Soit la fonction f défiie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) si\ x \in\ ]0;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Etudie la dérivabilité de f en 0.
2. Etudie la limite de f en $+\infty$

3. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$
   a. Démontre que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = x(lnx - 1)$
   b. Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variations.
1. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 1.
2. Soit la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$
   a. Calcule h' pour tout $x > 0$
   b. Etudie les variations de h' sur $]0;+\infty[$et dresse son tableau de variations. (On ne calculera pas les limites)
   c. Déduis-en le signe de h' et donne les variations de h

EXERCICE 5 **(3.5 points)**

On considère l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}$; $\quad Z^3 - 2(\sqrt{3} + i)Z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})Z - 8i = 0$

1) a) Monter que $2i$ est une solution de (E).
   b) Vérifier que l'équation (E) équivaut à $(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$ puis en déduire l'ensemble de solution de (E)
2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; I; J)$: unité 2 cm.
   On donne les points $A; B; C$ et D d'affixes respectives : $\sqrt{3} - i$; $1 + i$; $\sqrt{3} + i$ et $2i$
   a) Déterminer le module et l'argument principal de $Z_A = \sqrt{3} - i$; $Z_B = 1 + i$; $Z_C = \sqrt{3} + i$ et $Z_D = 2i$
   b) Placer les points $A; B; C$ et D
3) On pose : $Z = \frac{Z_A}{Z_B}$
   a) Ecrire Z sous forme algébrique.
   b) Déterminer le module et l'argument principal de Z.
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$

EXERCICE 6 **(5points)**

Dans le cadre de la lutte contre la Covid-19, un laboratoire de médecins chercheurs teste un vaccin dénommé « Johnson » sur un ensemble d'individus ayant contracté le virus.
60% des individus acceptent de prendre le vaccin, les autres refusent. Chez les individus ayant fait le vaccin, on constate la guérison avec une probabilité de 0,8. Et on ne constate aucune guérison pour 90% des personnes ayant refusé le vaccin.
Pour avoir une idée claire sur l'efficacité de ce vaccin, on interroge un des médecins chercheurs, celui-ci affirme que pour un échantillon de 4 individus pris au hasard parmi ceux ayant contracté le virus, il ya plus de 90% de chance d'avoir au moins une personne guérie, et ce grâce au vaccin.
Il est question pour toi de nous rassurer de la véracité de l'affirmation de ce chercheur avec des arguments mathématiques solides.