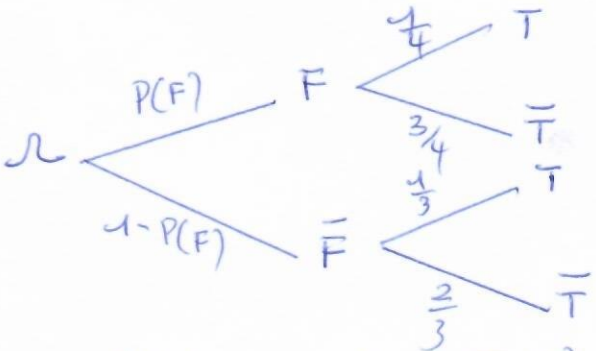
CORRECTION	BAREMES
EXERCICE 1	2 POINTS
1- VRAI 2- FAUX 3- FAUX 4- VRAI	4 × 0,5 pt
EXERCICE 2	2 POINTS
1- B 2- C 3- A 4- A	4 × 0,5 pt

EXERCICE 3 — 3,5 points

PARTIE A

1- Démontrons que $P(F) = \frac{2}{5}$

Arbre Pondéré de la situation



0,25

On a
$$P(T) = P(F \cap T) + P(\bar{F} \cap T)$$
$$P(T) = P(F) \times P_F(T) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(T)$$
$$P(T) = P(F) \times P_F(T) + (1 - P(F)) \cdot P_{\bar{F}}(T)$$
$$P(T) = P(F) \times P_F(T) + P_{\bar{F}}(T) - P(F) \times P_{\bar{F}}(T).$$
$$P(T) = P(F)\left[P_F(T) - P_{\bar{F}}(T)\right] + P_{\bar{F}}(T)$$

0,25

Ainsi $P(F)\left(P_F(T) - P_{\bar{F}}(T)\right) = P(T) - P_{\bar{F}}(T)$

Par suite
$$P(F) = \frac{P(T) - P_{\bar{F}}(T)}{P_F(T) - P_{\bar{F}}(T)}$$
$$= \frac{\frac{3}{10} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}$$

D'où $P(F) = \frac{2}{5}$ — 0,25

CORRECTION	BAREME

EXERCICE 3 (Suite

2- Déterminons $P_T(F)$

$$P_T(F) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)}$$ 0,25

$$P_T(F) = \frac{P(F) \times P_F(T)}{P(T)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}}$$

Donc $\boxed{P_T(F) = \frac{1}{3}}$ 0,25

PARTIE B

1- a) Déterminons la probabilité pour qu'en 4 semaines Consécutives il y ait Exactement ~~au moins~~ 2 membre qui adhèrent à la section Tennis.

désignons Par X la variable aléatoire égale au nombre de de membres qui adhèrent à la section Tennis pendant les 4 semaines Consécutives. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ 0,25

avec $n = 4$ et $p = 0,3$

$$P(X=2) = C_4^2 (0,3)^2 (1-0,3)^{4-2}$$ 0,25

$$= C_4^2 \times (0,3)^2 \times (0,7)^2$$

$$= 6 \times 0,09 \times 0,49$$

$$\boxed{P(X=2) = 0,2646}$$

b) Démontrons que $p^+ = 0,0837$

D'après ce qui précède $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ avec $n=4$ et $p=0,3$

$$p^+ = P(X \geq 3)$$

$$p^+ = P(X=3) + P(X=4)$$ 0,25

CORRECTION	BAREME

$$p^+ = C_4^3 \times (0,3)^3 \times (0,7) + C_4^4 (0,3)^4 \times (0,7)^0$$ 0,25 pts

$$= 4 \times 0,027 \times 0,7 + 1 \times 0,0081 \times 1$$

$$= 0,0756 + 0,0081$$

d'où $p^+ = 0,0837$

2) a- Déterminons la loi de Probabilité de X

. On a $X(\Omega) = \{-5000^F ; 15000^F ; 35.000^F\}$. 0,25 pts

. Calcul des Probabilités.

$$P(X = -5000^F) = \frac{C_{90}^2}{C_{100}^2} = \frac{4005}{4950} = \frac{89}{110}.$$

$$P(X = 15000^F) = \frac{C_{90}^1 \times C_{10}^1}{C_{100}^2} = \frac{90 \times 10}{4950} = \frac{900}{4950} = \frac{2}{11}$$ 0,25 pts

$$P(X = 35.000^F) = \frac{C_{10}^2}{C_{100}^2} = \frac{45}{4950} = \frac{1}{110}$$

d'où la Loi de Probabilité est:

x_i	$-5000F$	15000^F	35000^F
p_i	$\frac{89}{110}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{110}$

0,25

b) calculons E(X)

$$E(X) = -5000 \times \frac{89}{110} + 15000 \times \frac{2}{11} + 35000 \times \frac{1}{110}$$

$$E(X) = -\frac{44500}{11} + \frac{30.000}{11} + \frac{3500}{11}$$

$$\boxed{E(X) = -1000}$$ 0,25

$E(X) < 0$, donc la loterie est defavorable au joueur. 0,25

CORRECTION	BAREMES

EXERCICE 4

4 points

f définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) \text{ si } x>0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$

1- Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{2}x\ln x - \frac{3}{4}x$$

0,25

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0} \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\frac{3}{4}x = 0 \end{cases}$$

Donc f est dérivable en 0. 0,25

2. Etudions la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

0,25

3) a- Démontrons que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = x(\ln x - 1)$. 0,5

f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)\right]'$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)'\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)'$$

$$= x\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}$$

CORRECTION	BAREME

EXERCICE 4 (Suite)

$$f'(x) = x\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + \frac{x}{2}$$
$$= x\left(\ln x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= x(\ln x - 1)$$

D'où $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = x(\ln x - 1)$.

b) * Les variation de f.

. signe de la dérivée

$\forall x \in]0;+\infty[$, $x>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x - 1$. D'où

$$\begin{cases} \forall x \in]0;e[, \ f'(x) < 0 \\ \forall x \in]e;+\infty[, \ f'(x) > 0 \end{cases}$$ 0,25

* Sens de variation de f 0,25

. f est strictement décroissante sur $]0;e[$.

. f est strictement croissante sur $]e;+\infty[$.

* Tableau de variation de f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

$$f(e) = \frac{e^2}{2}\left(\ln e - \frac{3}{2}\right) = \frac{e^2}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{e^2}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Donc $f(e) = -\frac{e^2}{4}$

CORRECTION	BAREME

EXERCICE 4 (suite)

4) Déterminons l'équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 1.

$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ 0,25

On a :

- $f'(1) = 1(\ln 1 - 1) = 1 \times (0-1) = -1$.
- $f(1) = \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

$(T) : y = -(x-1) - \frac{3}{4}$

$= -x + 1 - \frac{3}{4}$

Donc $(T) : y = -x + \frac{1}{4}$ 0,25

5) $h :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \; h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$.

a- Calculons h' pour tout $x > 0$

h' est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[, \; h'(x) = f'(x) + 1$

$h'(x) = x(\ln x - 1) + 1$. 0,25

b) Les variation de h' sur $]0;+\infty[$.

h' est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[, \; h''(x) = \ln x - 1 + x \times \frac{1}{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[, \; h''(x) = \ln x$ 0,25

Donc $\begin{cases} \forall x \in]0;1[, \; h''(x) < 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[, \; h''(x) > 0 \end{cases}$

Sens de variation de h'

- h' est strictement décroissante sur $]0;1[$ 0,25
- h' est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

CORRECTION | BAREME

EXERCICE 4 (suite et Fin).

* Tableau de variation de h'

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

0,25

$h'(1) = f'(1)+1 = -1+1 = 0.$

c) * En déduisons le signe de h'

D'après ce qui précède, 0 est le minimum de h' sur $]0;+\infty[$. 0,25

$\forall\, x \in]0;+\infty[,\ h'(x) \geq 0.$

* Sens de variation de h 0,25

h est croissante sur $]0;+\infty[$.

EXERCICE 5

(E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0$

1) a- Montrons que $2i$ est une solution de E.

$(2i)^3 - 2\times(2i)^2(\sqrt{3}+i) + 4\times 2i(1+i\sqrt{3}) - 8i$

$= -8i + 8(\sqrt{3}+i) + 8i(1+i\sqrt{3}) - 8i$

$= 8\sqrt{3} + 8i + 8i - 8\sqrt{3} - 16i$

$= 8\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 16i - 16i$

$= 0$

Donc $2i$ est une solution de (E). 0,25

b) Vérifions que (E) équivaut à $(z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

- la division euclidienne
- la méthode de développement 0,25
- Autres méthodes correcte.

CORRECTION	BAREMES

EXERCICE 5 (suite)

c) * Résolvons dans $\mathbb{C}$ $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times4$

$\Delta=12-16$

$\Delta=-4$ — 0,25

$\Delta=4i^2=(2i)^2$.

$z_1=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2} \iff z_1=\sqrt{3}-i$

$z_2=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2} \iff z_2=\sqrt{3}+i$

Donc $S_{\mathbb{C}}=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\}$. — 0,25

* En déduisons les solutions de (E)

$z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i=0$

$\iff (z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

$\iff z-2i=0$ ou $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\iff z=2i$ ou $z=\sqrt{3}-i$ ou $z=\sqrt{3}+i$

Donc $S_{\mathbb{C}}=\{2i;\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\}$. — 0,25

2.) Déterminons le module et l'argument principal :

* $z_A=\sqrt{3}-i$

- module :

$|z_A|=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$.

- l'argument principal :

soit $\theta=\mathrm{Arg}(z_A)$.

Alors $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{2}\end{cases} \iff \theta=-\frac{\pi}{6}$ — 0,25

CORRECTION	BAREME

Donc $Arg(z_A) = -\frac{\pi}{6}$.

* $z_B = 1+i$

- module

$|z_B| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ — 0,25

- $Arg(z_B)$

soit $\theta = Arg(z_B)$. Alors $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$

D'où $Arg(z_B) = \frac{\pi}{4}$.

* $z_C = \sqrt{3} + i$

- module

$|z_C| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$ — 0,25

- $Arg(z_C)$

soit $\theta = Arg(z_C)$. Alors $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$.

Donc $Arg(z_C) = \frac{\pi}{6}$.

* $z_D = 2i$

- module

$|z_D| = |2i| = 2.$ — 0,25

- $Arg(z_D)$

soit $\theta = Arg(z_D)$ - Alors $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Donc $Arg(z_D) = \frac{\pi}{2}$.

b) voir feuille Annexe. — 0,25

3) On pose $Z = \frac{z_A}{z_B}$

CORRECTION	BAREME

EXERCICE 5 (suite et Fin)

a) Ecrivons z sous forme algébrique

$$z = \frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{3}-i}{1+i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}-i+i^2}{1+1}.$$

$$z = \frac{\sqrt{3}-1-i(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

Donc $z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ 0,2V

b) Déterminons $|z|$ et $Arg(z)$.

$$|z| = \left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$ 0,2V

Donc $|z| = \sqrt{2}$.

$$Arg(z) = Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = Arg(z_A) - Arg(z_B)$$

$Arg(z) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$ donc $Arg(z) = -\frac{5\pi}{12}$. 0,2V

c) En déduisons les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$ 0,2V

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}.$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ 0,2V

$$\boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

CORRECTION	BAREME
EXERCICE 6	5 POINTS

EXERCICE 6

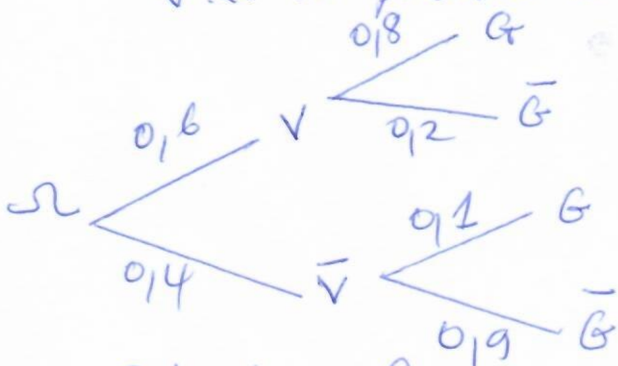
Pour vérifier l'affirmation du chercheur, je vais fait appel à la notion de probabilité conditionnelle et celle de loi binomiale. Je vais :

- Etablir l'arbre pondéré correspondant à la situation
- Calculer la probabilité de l'événement G : « l'individu est guéri ».
- Définir une variable aléatoire X puis déterminer les valeurs prise par X.
- Calculer $P(X \geq 1)$.

• L'arbre pondéré de la situation

Soient : G : « la personne est guérie ».

V : « la personne a accepté le vacin ».



• Calculons la probabilité $P(G)$ de G

$P(G) = P(G \cap V) + P(G \cap \bar{V})$

$= P(V) \times P_V(G) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(G)$

$= 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1$

$= 0,48 + 0,04$

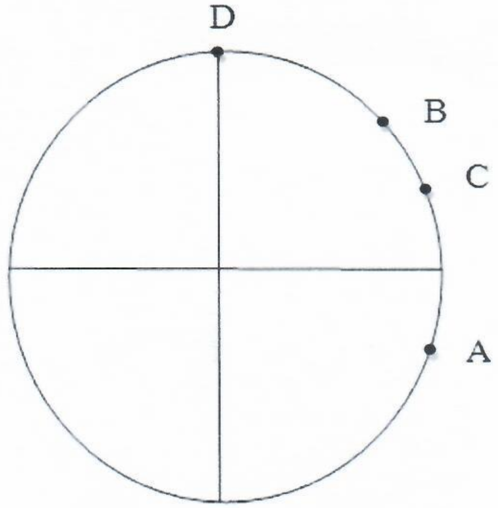
$P(G) = 0,52$.

• Définis une variable aléatoire X

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de personnes guéries sur les 4 individus interrogés.

GRILLE DE NOTATION (EXERCICE 6).

CRITERES	INDICATEURS DE PERFORMANCES	BAREME DE NOTATION
CM 1 PERTINENCE	- Je vais fait appel à la notion de Probabilité Conditionnelle - Présence de Arbre Pondéré - Présence de variable aléatoire - Présence de loi binomiale. - Présence de calcule de P(G) - Présence de calcul de $P(X \geq 1)$	1I/6 → 0,25 2I/6 → 0,5 3I/6 → 0,75 0,75 pt
CM 2 UTILISATION CORRECTE DES OUTILS MATHEMATIQUES	- Respect des étapes de la méthode - Arbe pondéré Correct - Exactitudes formules - P(G) Correcte - X(Ω) Correcte - paramètres Corrects	1I/6 → 0,5 2I/6 → 1 3I/6 → 1,5 4I/6 → 2 5I/6 → 2,5 2,5 pts.
CM3 Coherence des réponses	- $P(X \geq 1) \simeq 0{,}95$ - Il y a enviro 95% de chance d'avoir au moins une personne guérie sur les 4 interrogées - Les affirmations du medecin sont vraies.	1I/3 → 0,75 2I/3 → 1,25 1,25
CP CRITERE DE PERFECTIONNEMENT	- Concision - Originalité - Présentation	1I/3 → 0,25 2I/3 → 0,5 0,5 pt



ANNEXE SERIE D EXO 5