

BAC BLANC
AVRIL 2022

MATHÉMATIQUES

Coefficient: 4
Durée : 4h
Série : D

Cette épreuve comporte deux(2) pages numérotées 1/2, 2/2.
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

Exercice 1 : (02 points)

Associe chaque numéro de l'énoncé, à **vrai** si l'énoncé est vrai ou à **faux** si l'énoncé est faux.

Exemple : 5. Vrai

Numéro	Enoncé
1.	Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ alors la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0 .
2.	g est une fonction dérivable sur $[0; 5]$ et bijective de $[0; 5]$ sur $[-1; 3]$ telle que $g(4) = 2$. Si $g'(4) = 0$ alors g^{-1} est dérivable en 2.
3.	Les racines carrées du nombre complexe $-8 - 6i$ sont $1 - 3i$ et $-1 + 3i$
4.	A étant un événement de l'univers Ω d'une expérience aléatoire, son complémentaire est $\bar{A}$. On a alors $P(\bar{A}) = P(A) + 1$

Exercice 2 : (02 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est juste. Sur ta feuille de copie, écris le numéro de l'affirmation suivi par la lettre correspondant à la réponse juste. **Exemple : 5.A**

Numéro	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1.	si $\forall x \in]a; +\infty[, g(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ alors	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
2.	si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$ alors la variance $V(X)$ est égale à	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{4}$
3.	a et b sont deux nombres réels. Si h est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et si $h(a) \times h(b) < 0$ alors	h ne s'annule pas entre a et b	h s'annule une fois entre a et b	h s'annule au moins une fois entre a et b
4.	Soit $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) Un nombre complexe. Si z est un imaginaire pur alors	$ z ^2 = -y^2$	$ z ^2 = y^2$	$ z ^2 = z^2$

Exercice 3 : (03 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{4}{3}\cos^3 x - \cos x$.

- Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -3\sin x + 4\sin^3 x$ et $g''(x) = 9\cos x - 12\cos^3 x$.
- Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = -9g(x)$.
- En déduis les primitives de g sur $\mathbb{R}$.
- Détermine la primitive F de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 : (03,5 points)

On muni le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 1cm.

On désigne par (E) l'ensemble des points $M(z)$ où z est un nombre complexe tel que :

$|(1+i)z + 2 - 2i| = 4\sqrt{2}$ et on note par F le point d'affixe $2i$.

- Démontre que : $M(z) \in (E) \Leftrightarrow |z - 2i| = 4$.
- Place le point F . Détermine puis construis l'ensemble (E) .
- On pose $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels.
 - Détermine les points d'intersection de (E) et l'axe des réels.
 - Détermine les points d'intersection de (E) et l'axe des imaginaires.
- On donne : $z_A = -2\sqrt{3}$, $z_B = 2\sqrt{3}$, $z_K = -2\sqrt{3} + 4i$ et $z_E = 6i$.
 - Justifie que le point K appartient à (E) .
 - place les points E , K , A et B .
 - Démontre que : $\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - En déduis la nature du triangle ABE

Exercice 5 : (06,5 points)

Partie A : on considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1 + \frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x^2+1}$.

- Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
- Calcule la dérivée g' de g et montre que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.
 - Étudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.
 - En déduis qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.
 - vérifie que : $0,5 < \alpha < 0,6$.
- Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B : on considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x^2}) \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique $5cm$

- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ et en déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- Justifie que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1 + \frac{1}{x^2}) = 0$. Déduis-en que f est continue en 0.
 - Etudie la dérivée de f et en déduis-en une interprétation graphique.
- Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
 - Déduis-en les variations de f puis dresse son tableau de variation.
- Démontre que : $\forall x \in [0,5; \alpha]; 0 \leq f'(x) \leq f'(0,5)$.
 - En déduis que : $\forall x \in [0,5; \alpha]; 0 \leq f(x) - f(0,5) \leq (\alpha - 0,5)f'(0,5)$ et que $0 \leq f(x) - f(0,5) \leq \frac{1}{10}f'(0,5)$.
 - Déduis-en qu'une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près est: 0,81
- trace la courbe (C) . On prendra $\alpha = 0,55$

Exercice 6 : (03 points)

Pour réduire le nombre d'accidents de circulation dû à la consommation d'alcool par les automobilistes, la gendarmerie nationale utilise un nouvel alcooltest. Après un essai, dans une population composée de 8% de personnes ivres, la gendarmerie recueille les statistiques suivantes :

- 80% des automobilistes ivres sont déclarés positifs à ce test.

95% des automobilistes non ivres sont déclarés négatifs à ce test. Le commandant de brigade de la gendarmerie de ta localité voudrait savoir le nombre minimal d'automobilistes à contrôler pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure à 0,99. Il te sollicite pour trouver ce nombre.

Utilise tes connaissances en mathématiques pour répondre à la préoccupation du commandant.