Coefficient : 5

Série : C

BAC BLANC

SESSION DE FEVRIER 2022

Durée : 4h

EPREUVE : MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages numérotés 1, 2.
La calculatrice scientifique est autorisée.
Chaque élève recevra deux (02) feuilles de papier millimétré

EXERCICE 1 (2pts)

Dans chacun des cas, réponds par « Vrai » ou « Faux » aux affirmations suivantes :

1- Une fonction est prolongeable par continuité en un point si ce point est un élément de son ensemble de définition et elle admet une limite finie en ce point.
2- Si les fonctions f et sont dérivables en un point a laors : $(fog)'(a) = g'(a) \times (f'og)(a)$
3- La primitive de la fonction $\sin(3x+4)$ est $-\frac{1}{3}\cos(3x+4)$
4- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 2 (2pts)

Pour chaque ligne du tableau une seule affirmation est correcte. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de la ligne suivie d'une lettre de la colonne de manière à obtenir l'affirmation vraie.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	L'argument principal du nombre complexe $z = -3e^{i\frac{\pi}{6}}$ est	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	Soient les points $A(5;2;3)$; $B(4;-2;1)$ et $C(2;4;-5)$. Une équation cartésienne du plan passant par C et orthogonal à la droite (AB) est	$x-4y-2z+4=0$	$x-4y-2z-4=0$	$x+4y+2z-4=0$
3	ABC est un triangle et G l'isobarycentre des points A, B et C. L'ensemble des points M du plan vérifiant : $\left\lVert\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\rVert = AC$ est	La droite médiatrice de $[AC]$	L'ensemble vide	Le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}AC$
4	Le $PGCD(2016;1188)$ est égal à	36	1	0

EXERCICE 3 (3pts)

Soit (U_n) la suite numérique définie par :11 $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{U_n}, \forall n \in IN \end{cases}$

1) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{3}{2} \le U_n \le 2$.
2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.
   a- Résous dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note l l'unique solution de cette équation.
   b- Démontre que pour tout $x \ge \frac{3}{2}$, $|f'(x)| \le \frac{4}{9}$
   c- En déduis que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - l| \le \frac{4}{9}|U_n - l|$.
   d- Démontre par récurrence que $\forall n \in IN$, $|U_n - l| \le \left(\frac{4}{9}\right)^n \times \frac{1}{2}$
   e- En déduis que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

EXERCICE 4 (4pts)

I) Soit le polynôme complexe $P(z)=z^3+(-12+3i)z^2+(36-30i)z+12+76i$

1) Calcule $P(-2i)$.
2) Justifie que $P(z)=(z+2i)(z^2+(-12+i)z+38-6i)$

2) Résous dans C l'équation $P(z)=0$

II) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité 1cm.

Soit F, K et L les points d'affixes respectives $-2\,i$, $6-2\,i$ et $6+i$.

1) Place ces points dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

2) Soit (Γ) l'ellipse de foyer F, de directrice (KL) et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

a) Détermine les affixes de sommets A et A' de (Γ) appartenant à l'axe focal .

b) Calcule la distance AA'.

c) Détermine l'affixe du point Ω milieu du segment $[AA']$.

d) Détermine une équation de (Γ) dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

EXERCICE 5 (5pts)

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$.

1) a) Détermine la limite de f en $+\infty$.

b) Montre que $\forall x\in[0\,;+\infty[,\ f(x)=x+\ln(1+e^{-2x})$.

c) En déduis que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

2) On admet que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$

a) Montre que $\forall x\in[0\,;+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x+e^{-x}}$.

b) En déduis le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c) Trace (C_f) dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité 3 cm.

PARTIE B

Pour tout x élément de $[0\,;+\infty[$, on pose $F(x)=\int_0^x \ln(1+e^{-2t})dt$ (on ne cherchera pas à calculer $F(x)$).

1) Etudie le sens de variation de F sur $[0\,;+\infty[$.

2) On admet que pour tout réel strictement positif a, on a : $\dfrac{a}{1+a}\le\ln(1+a)\le a$

Montre pour tout x élément de $[0\,;+\infty[$, on a : $\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{-2x})\le F(x)\le\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

3) On admet que la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel l .

Détermine un encadrement de l.

EXERCICE 6 (5pts)

Deux élèves du Collège Catholique Charles Lwanga en classe de Terminale C, décident de communiquer de façon codée. Pour cela, ils définissent le mode de codage suivant : Il assimile chaque lettre de l'alphabet français, pris dans l'ordre alphabétique à un nombre entier naturel de 0 à 25.

Ils considèrent la fonction de codage $\begin{cases} f:\{0,1\,\ldots,25\}\longrightarrow\{0,1\,\ldots,25\} \\ \qquad x\mapsto f(x)\end{cases}$. Avec $f(x)\equiv 29x+13[26]$.

(Autrement dit, $f(x)$ est le reste de $29x+13$ dans la division euclidienne par 26)

On code tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la manière suivante : On détermine le reste r de la division euclidienne de $f(x)$ par 26 ensuite x est alors codé par r.

L'un d'eux qui a passé concours, envoie le mot NWXLP à son père en lui signifiant que ce mot est le résultat de son concours. Le père excité, veut savoir le résultat de son fils. Malheureusement, il ne sait pas comment décoder ce mot. Il te sollicite. Réponds à sa préoccupation.

CORRECTION DU SUJET ET LE BAREME TC

<table>
<tr><th>LIBELLES</th><th>CORRIGE</th><th>POINTS</th></tr>
<tr><td>Exercice 1</td><td>1) $Faux$ 2) $Vrai$ 3) $Vrai$ 4) $Faux$</td><td>$\mathbf{0,5 \times 4}$</td></tr>
<tr><td>Exercice 2</td><td>$1-a)$ $2-b)$ $3-c)$ $4-a)$</td><td>$\mathbf{0,5 \times 4}$</td></tr>
<tr><td>Exercice 3
(4pts)</td><td>1- $\forall\, n \in N, \frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$. Démonstration correcte (1pt)
2- a) $f(x) = x$. $S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. Démonstration correcte (0,5pt)
b) $\forall\, x \geq \frac{3}{2}, |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$. Démonstration correcte (0,75pt)
c) $|u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$. Démonstration correcte (0,5pt)
d) $\forall\, n \in N, |u_n - l| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \frac{1}{2}$. Démonstration correcte (0,75pt)
e) (u_n) converge et sa limite est la solution de l'équation $f(x) = x$ (0,5pt)</td><td></td></tr>
<tr><td>Exercice 4</td><td>I-
1- $P(-2i) = 0$ (0,25pt)
2- $P(z) = 0$. $S = \{-2i\ 6 - 2i; 6 + i\}$ (0,5pt)
II-
1- Papier millimétré $(\mathbf{0,25}\boldsymbol{pt})$
2- a) $z_A = -4i$ et $z_{A'} = 4i$ (0,5pt)
b) $AA' = 8$ (0,25pt)
c) $z \ \ = 0$ (0,25pt)
$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ (0,75pt)
3- Papier millimétré (0,25pt)</td><td>3 Points</td></tr>
<tr><td>Exercice 5</td><td><u>Partie A</u>
1- a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (0,25pt)
b) $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$ (0,5pt)
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0$. Donc $(D): y = x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$ (0,5pt)
2- a) $f'(x) = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x+e^{-x}}$ (0,75pt)
b) $\forall\, x \in [0; +\infty[$, f'(x) > 0, alors $f(x)$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (0,75pt)
(0,5pt)
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$
↗
$ln2$</td></tr>
</table>
b) Courbe de f. Papier millimétré (0,25)
<u>Partie B</u>
1- $F(x)$ est strictement croissante (0,5pt)
2- $\frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$. Démonstration correcte (0,5pt)
3- $\frac{1}{2}ln2 \leq l \leq \frac{1}{2}$ (0,5pt</td><td>5 Points</td></tr>
</table>

Exercice 6 — **5 Points**

Pour répondre à la préoccupation du de l'ami, je vais utiliser l'arithmétique. Je vais déterminer un entier u tel que $29u \equiv 1[26]$ avec $0 \leq u \leq 25$. Puis je vais en déduire la fonction de décodage g associée à f. Ensuite je vais décoder alors chaque lettre du mot NWXLP.
Et pour finir je vais répondre à la préoccupation de cet ami.

Je détermine un entier u tel que $29u \equiv 1[26]$ avec $\leq u \leq 25$.

$29u \equiv 1[26] \iff 29u = 1 + 26v[$, avec $0 \leq u \leq 25$ et $v \in \mathbb{Z}$.

$\iff 29u - 26v = 1$, avec $0 \leq u \leq 25$ et $v \in \mathbb{Z}$.

- J'utilise le tableau de l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de l'équation : $29u - 26v = 1$.

a	**29**	**26**	**3**	**2**
b	26	3	2	1
r	3	2	1	0
q	1	8	1	2

D'après le tableau, PGCD(29 ;26) =1 ,donc 29 et 26 sont premiers entre eux.

1=3-2×1 ; 1=3-(26-8×3) ; 1=3×9-26 ;1=(29-26×1) ×9-26 ;1=29×9-26×10.

Le couple (9 ; 10) est une solution particulière de l'équation : $29u - 26v = 1$

$$\begin{cases} 29u - 26v = 1 \\ 29 \times 9 - 26 \times 10 = 1 \end{cases} \Rightarrow 29(u-9) - 26(v-10) = 0.$$

$$\Rightarrow 29(u-9) = 26(v-10)$$

26 divise $29(u-9)$ et est premier avec 29, donc d'après le théorème de Gauss

26 divise $u - 9$; d'où $-9 = 26k \Rightarrow u = 9 + 26k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$0 \leq u \leq 25 \Rightarrow 0 \leq 9 + 26k \leq 25 \Rightarrow -0{,}35 \leq k \leq 0{,}7 \Rightarrow k = 0$ .d'où $u = 9$.

Je vais en déduire la fonction de décodage g associée à f.

$$29x + 13 \equiv y[26] \iff 29x \equiv -13 + y[26]$$
$$\iff 29x \equiv 13 + y[26].$$
$$\iff 9 \times 29x \equiv 9 \times 13 + 9y[26].$$
$$\iff x \equiv 13 + 9y[26].$$

J'en déduis la fonction de codage $\begin{cases} g: \{0,1 \dots,25\} \longrightarrow \{0,1 \dots,25\} \\ y \mapsto g(y) \end{cases}$

Avec $g(y) \equiv 9y + 13[26]$. (Autrement dit, $g(y)$ est le reste de $9y + 13$ dans la division euclidienne par 26).

Je décode chaque lettre du mot NWXLP.

lettres	N	**W**	**X**	**L**	**P**
y	13	22	23	11	15
$9y + 13$	130	211	220	112	148
	0	3	12	8	18
Code	**A**	**D**	**M**	**I**	**S**

Le mot est **ADMIS**

Critères	Indicateurs	Barème de notation
CM1 : Pertinence	- **je vais utiliser les leçons Arithmétique** - **Je détermine un entier** u **tel que** $\mathbf{29}\boldsymbol{u} \equiv \mathbf{1}[\mathbf{26}]$ **avec** $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{u} \leq \mathbf{25}$ - **Je vais en déduire la fonction de décodage** $\boldsymbol{g}$ **associée à** $\boldsymbol{f}$ - **Je décode chaque lettre du mot NWXLP**	**0,75 point** **1 ind sur 4 pour 0,25pt** **2 ind sur 4 pour 0,5pt** **3 ind sur 4 pour 0,75pt**
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques	- **Détermination de** $\boldsymbol{u}$ - **Détermination de la fonction** $\boldsymbol{g}$ - **Le décodage** - **Le mot**	**2,5 points** **1 ind sur4 pour 1pt** **2 ind sur 4 pour 1,5pt** **3 ind sur 4 pour 2,5pt**
CM3 : Cohérence des réponses	- $\boldsymbol{u} = \mathbf{9}$ - $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \equiv \mathbf{9}\boldsymbol{y} + \mathbf{13}[\mathbf{26}]$ - $\boldsymbol{N} = \mathbf{0}: \boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{W} = \mathbf{3}$ **: D** - $\boldsymbol{X} = \mathbf{12}$ **: M** - $\boldsymbol{L} = \mathbf{8}$ **: I** - $\boldsymbol{P} = \mathbf{18}: \boldsymbol{S}$	**1,25 point** **1 ind sur 7 pour 0,5pt** **2 ind sur 7 pour 0,75pt** **3 ind sur 7 pour 1pt** **4 ind sur 7 pour 1,25pt**
CP : Critère de perfection	- **Concision** - **Originalité** - **Bonne présentation**	**0,5 point** **1 ind sur 3 pour 0,25** **2 ind sur 3 pour 0,5**