

BAC BLANC

Coefficient : 4

Série : D

SESSION DE FEVRIER 2022

Durée : 4h

EPREUVE :

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages numérotés 1, 2.

La calculatrice scientifique est autorisée.

Chaque élève recevra deux (02) feuilles de papier millimétré

EXERCICE 1 (2pts)

Dans chacun des cas, réponds par « Vrai » ou « Faux » aux affirmations suivantes :

- 1- Soit h une fonction et a un nombre réel. S'il existe une fonction k telle que $h(x) \geq k(x)$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- 2- Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a; b]$, alors $f([a; b])$ est l'intervalle $[f(b); f(a)]$
- 3- Soit h une fonction, d'un intervalle I sur un intervalle J . Si h est continue et strictement décroissante sur I , alors sa bijection réciproque h^{-1} est strictement croissante sur J .
- 4- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

EXERCICE 2 (2pts)

Pour chaque ligne du tableau une seule affirmation est correcte. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de la ligne suivie d'une lettre de la colonne de manière à obtenir l'affirmation vraie.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ est égale à	0	$-\infty$	$+\infty$
2	On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5 + \frac{x}{x^2+2}$. La représentation graphique de f dans un repère admet en $+\infty$, une asymptote d'équation	$y = -2x + 5$	$y = 2x - 5$	$y = 2x$
3	1- On donne l'arbre pondéré suivant La probabilité $P(N)$ est égale à	0,30	0,31	0,29
4	Soient A et B deux événements tels que $P_B(A) = 0,25$, $P(A \cap B) = 0,15$ et $P(A) = 0,4$ alors $P(B)$ est égale	0,3	0,0375	0,6

EXERCICE 3 (3pts)

Soit la fonction f définie sur $R \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 5}{x^2 - 1}$

- 1- Justifie que : $f(x) = x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x^2 - 1}$
- 2- Montre que $\forall x \in R \setminus \{-1; 1\}, \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$
- 3- a) Détermine les primitives F de f sur $]1; +\infty[$
b) Détermine la primitive F de f qui s'annule en 2

EXERCICE 4 (4pts)

On considère le polynôme P défini sur C par : $P(z) = z^3 + (6 - 5i)z^2 + (1 - 20i)z - 14 - 5i$

- 1- a) Calcule $P(i)$
b) Montre que $P(z) = (z - i)(z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i)$
c) Résous dans C , l'équation : $z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i = 0$
d) En déduis dans C , les solutions de l'équation $P(z) = 0$
- 2- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) , on donne les points A, B et C d'affixes respectives $i; -2 + 3i$ et $-4 + i$
a) Place les points A, B et C . (Unité graphique $2cm$)
b) Calcule $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique
c) En déduis la nature du triangle ABC
- 3- a) Détermine l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer le point D
b) Précise la nature du parallélogramme
c) Montre que les points A, B, C et D sont sur le même cercle dont on précisera l'affixe du centre et le rayon

EXERCICE 5 (5pts)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$ et (C) sa représentation graphique.

- 1- Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$
- 2- Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$
- 3- Détermine le sens de variation de f et dresse son tableau de variation
- 4- Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $2e$
- 5- Justifie que le point $B(2e; e)$ est le point d'intersection de (C) et (T)
- 6- Construis (C) et (T) . Unité graphique : $OI = OJ = 1cm$

EXERCICE 6 (5pts)

La direction du Collège Catholique Charles Lwanga de Ferké décide de récompenser ses élèves à la fin du premier trimestre à travers un jeu. Pour y participer, il faut faire partie des meilleurs élèves de sa classe.

Ce jeu consiste à tirer au hasard une boule dans une urne contenant n boules blanches, $n + 2$ boules jaunes et 6 boules noires, n étant un entier naturel non nul. Chaque boule a la même chance d'être tirée (les boules sont indiscernables au toucher).

- Si la boule tirée est jaune, l'élève gagne $10.000FCFA$
- Si la boule tirée est blanche, l'élève gagne $500FCFA$
- Si la boule tirée est noire, l'élève remet la boule dans l'urne et procède à un nouveau tirage et s'il tire une boule jaune, il gagne $5000FCFA$ sinon il gagne $500FCFA$.

Un groupe d'élèves désirent déterminer le nombre de boules blanches et de boules jaunes à mettre dans l'urne pour que la probabilité de gagner au moins $5000FCFA$ soit maximale.

Toi élève de la Terminale D, utilise des connaissances mathématiques pour déterminer le nombre de boules blanches qui répondent aux préoccupations de ce groupe d'élèves.

CORRECTION DU SUJET ET LE BAREME TD

LIBELLES	CORRIGE				POINTS												
Exercice 1	1) Faux	2) Vrai	3) Faux	4) Vrai	0,5 × 4												
Exercice 2	1 – a)	2 – b)	3 – b)	4 – c)	0,5 × 4												
Exercice 3 (4pts)	1- a) Justification correcte : $P(2i) = 0$ (0,25pt) b) Justification correcte : $u = -3$ et $v = 3 - i$ (0,25pt) c) Justification correcte : $S_C = \{2 + i; 1 - i\}$ (0,5pt) d) $P(z) = 0 \quad S_C = \{2i; 2 + i; 1 - i\}$ (0,25pt) 2- a) Voir papier millimétré (0,25pt) b) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = i$ (0,25pt) c) ABC est un triangle rectangle et isocèle en B (0,25pt) 3- a) $z_D = -1$ (0,25pt) b) Justification correcte : $ABCD$ est un carré (0,25pt) c) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} : \frac{z_C - z_D}{z_A - z_D} = -1$ (0,25pt) A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre $\theta(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (0,25pt) 4- a) $ z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{10}}{2}$. C'est un cercle de centre $\theta(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (0,25pt) voir papier millimétré (0,25pt) b) $ z - 2i = z - 2 - i $. C'est la médiatrice de $[AB]$ (0,25pt) voir papier millimétré (0,25pt)																
Exercice 4	1- $a = 1, b = 2, c = -3$ et $d = 2$ (0,5ptx3) 2- Justification correcte (0,5pt) 3- a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + l(x - 1) - \ln(x + 1) + k$ (1pt) b) $F(2) = 0$ équivaut à : $k = -\frac{2}{3} + \ln 3$ (0,5pt) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + l(x - 1) - \ln(x + 1) - \frac{2}{3} + \ln 3$ (0,5pt)				3 Points												
Exercice 5	1- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5pt) 2- $f'(x) = \ln(\frac{x}{2})$ (0,5pt) 3- f est strictement décroissante sur $]0; 2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$ (1pt) (1pt) <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr></table> 4- $(T): y = x - 2e + 2$ (0,5pt) 5- Justification correcte (0,75pt) 6- Construction correcte de (C) et (T) (0,5pt+0,25pt)				x	0	2	$+\infty$	$f'(x)$				$f(x)$				5 Points
x	0	2	$+\infty$														
$f'(x)$																	
$f(x)$																	

Exercice 6

Pour déterminer la valeur de n de boules blanches pour que le maximum d'élèves obtiennent au moins 5000FCFA, je vais utiliser les leçons probabilité conditionnelle et variables aléatoires et étude de fonctions. Je vais déterminer les valeurs de X qui sont les gains possibles du joueur. Ensuite je vais déterminer la probabilité de gagner au moins 5000FCFA en fonction de n . Je vais traduire cette probabilité en une fonction dont je vais faire l'étude complète. Et enfin conclure.

Soit X la variable aléatoire associée au gain du joueur.

$$X = \{500; 5000; 10000\}.$$

Deux gains sont supérieurs ou égaux à 5000. Ce sont 5000 et 10000.

$$P(X = 5000) = \frac{n+2}{2n+8}$$

$$P(X = 5000) = \frac{6}{2n+8} \times \frac{n+2}{2n+8}$$

$$P(G) = \frac{n+2}{2n+8} + \frac{6}{2n+8} \times \frac{n+2}{2n+8} = \frac{n^2+9n+14}{2(n+4)^2}$$

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x^2+9x+14}{2(x+4)^2}$$

Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-x^2+4x+32}{2(x+4)^2}$. Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x^2 + 4x + 32$. f croît sur $[0; 8]$ et décroît sur $[8; +\infty[$.

La fonction atteint son maximum en 8 et $P(G) = 0,52$.

La plus grande valeur que peut prendre $P(G)$ est 0,52 pour $n = 8$.

Pour que les élèves aient plus de chance de gagner au moins 5000FCFA, il faut 8 boules blanches et 10 boules jaunes.

5 Points

Critères	Indicateurs	Barème de notation
CM1 : Pertinence	- je vais utiliser les leçons probabilité et étude de fonctions - Je vais déterminer le nombre de boules blanches pour que le maximum d'élèves obtiennent au moins 5000FCFA - Je vais calculer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins 5000FCFA	0,75 point 1 ind sur 3 pour 0,5pt 2 ind sur 3 pour 0,75pt
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques	- Obtenir au moins 5000FCFA c'est obtenir 5000FCFA ou 10000FCFA $P(5000FCFA)$ $P(10000FCFA)$ $P(5000FCFA) + P(10000FCFA)$ - Calcul d'une dérivée - Recherche du maximum d'une fonction	2,5 points 1 ind sur 6 pour 0,5 2 ind sur 6 pour 1 3 ind sur 6 pour 1,5 4 ind sur 6 pour 2,5
CM3 : Cohérence des réponses	- Le résultat produit est conforme au résultat attendu - Le résultat produit est en adéquation avec la démarche - La qualité des enchainements de la démarche	1,25 point 1 ind sur 3 pour 0,75 2 ind sur 3 pour 1,25
CP : Critère de perfection	- Concision - Originalité - Bonne présentation	0,5 point 1 ind sur 3 pour 0,25 2 ind sur 3 pour 0,5