CORRECTION DU BAC 2016
MATHEMATIQUES série A1

EXERCICE 1

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

1) Vérifions que $P(x) = (x+2)(2x^2 - 3x + 1)$

On a :

$$\begin{aligned}(x+2)(2x^2-3x+1) &= 2x^2 \times x - 3x \times x + x \times 1 + 2 \times 2x^2 - 2 \times 3x + 2 \times 1 \\ &= 2x^3 - 3x^2 + x + 4x^2 - 6x + 2 \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 4x^2 + x - 6x + 2 \\ &= 2x^3 + x^2 - 5x + 2\end{aligned}$$

Or $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

D'où $P(x) = (x+2)(2x^2 - 3x + 1)$

2-a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Calculons le discriminant de $2x^2 - 3x + 1$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2x \times 1$

$\Delta = 9 - 8$

$\Delta = 1$

Le discriminant est supérieur à zéro, l'équation a donc deux solutions qu'on notera $x_1 et\, x_2$

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$x_2 = 1$$

$S_R = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$

2-b) Déduisons-en tous les zéros du polynôme P

Posons $P(x) = 0$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ ou \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ ou \\ x = \frac{1}{2} \; ou \; x = 1 \end{cases}$$

Ainsi les zéros du Polynôme P sont : $-2\,;\frac{1}{2}\; et\; 1$

3) Résolvons dans ℝ l'équation $2e^{3x}+e^{2x}-5e^{x}+2=0$

Posons $X=e^{x} \Rightarrow \begin{cases} e^{3x}=X^3 \\ e^{2x}=X^2 \end{cases}$

Ce qui nous amène à l'équation auxiliaire : $2X^3+X^2-5X+2=0$ d'où $P(X)=0$.

Ainsi $\begin{cases} X=-2 \\ ou\ X=\frac{1}{2} \\ ou\ X=1 \end{cases}$ or $\forall x \in \mathbb{R}\ e^{x}>0$; on retient $\begin{cases} e^{x}=\frac{1}{2} \\ ou \\ e^{x}=1 \end{cases}$

$\begin{cases} e^{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2} \\ e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\ln 2 \\ x=0 \end{cases}$ Donc $\boxed{S_R=\{-ln2\,;0\}}$

EXERCICE 2

1) Justifions que le nombre de bureaux possible est égal à 6840.
Le bureau est constitué de 3 personnes dont les rôles sont bien définis, prises parmi 20 personnes.
Former ainsi un bureau revient à faire un arrangement de 3 dans 20.
Le nombre de bureaux est $A_{20}^{3}=20\times19\times18=6840$

2) Calculons la probabilité de l'évènement A.

$P(A)=\dfrac{Card(A)}{6840}$

Si aucun représentant des chefs religieux ne fait partie du bureau, les 3 personnes seront choisies parmi $(20-4)=16$.
Ainsi $Card(A)=A_{16}^{3}=16\times15\times14=3360$
D'où $P(A)=\frac{3360}{6840}=0{,}491$

3-a) Pour réaliser l'évènement B, il faut choisir 1 personne parmi les 4 représentants des chefs religieux et choisir parmi les 16 autres personnes 2 et choisir un rôle pour le représentant des chefs religieux.
Ainsi $Card(B)=A_{4}^{1}\times A_{16}^{2}\times A_{3}^{1}=4\times16\times15\times3=2880$

$P(B)=\dfrac{Card(B)}{6840}$

$P(B)=\dfrac{2880}{6840}=0{,}421$

3-b) Le poste du représentant des chefs religieux étant défini, il ne nous reste qu'à choisir une personne parmi les 4 représentants les chefs religieux et choisir 2 personnes parmi les 16 autres qui restent.
Ainsi $Card(C)=A_{4}^{1}\times A_{16}^{2}=4\times16\times15=960$
D'où $P(C)=\frac{960}{6840}=0{,}140$

4-a) L'évènement « $X=3$ » équivaut à ce que le bureau soit constitué uniquement de représentants des chefs religieux.
$Card(X=3)=A_{4}^{3}=4\times3\times2=24$

$P(X=3)=\dfrac{24}{6840}=0{,}004$

4-b) La loi de probabilité

X	0	1	2	3	Total
$P(X)$	0,491	0,421	0,084	0,004	1

$P(X=2)=1-(0{,}491+0{,}421+0{,}004)$

$= 1 - 0{,}916$
$= 0{,}084$

4-c) L'espérance mathématique
$E = 0 \times 0{,}491 + 1 \times 0{,}421 + 2 \times 0{,}084 + 3 \times 0{,}004$
$E = 0{,}601$

PROBLEME

On considère la fonction f dérivable et définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{-x+1}{2} + \ln x$

1-a) Calculons la limite de f en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x+1}{2} + \ln x\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x+1}{2}\right) + \lim_{x\to 0} \ln x$$
$$= \frac{1}{2} + (-\infty)$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

La droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

1-b) Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}\right)$$
$$= +\infty \times \left(-\frac{1}{2}\right) \; car \; \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \; et \; \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

2-a) Démontrons que pour tout x strictement positif ; $f'(x) = \frac{-x+2}{2x}$

$$(f(x))' = \left(\frac{-x+1}{2} + \ln x\right)'$$
$$= \left(\frac{-x}{2} + \frac{1}{2} + \ln x\right)'$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{x}$$

$f'(x) = \frac{-x+2}{2x}$

2-b) Justifions les variables de f
Etudions le signe de $f'(x)$
$f'(x) = 0 \; équivaut \; à -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	0		2		$+\infty$
$2x$		$+$		$+$	
$-x+2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

$\forall\ x\ \in]0;2[\ ; f'(x) > 0$
$\forall\ x\ \in]2;+\infty[\ ; f'(x) < 0$

Conclusion

f est strictement croissante sur $]0;2[$ et
f est strictement décroissante sur $]2;+\infty[$

2-c) Tableau de variation

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$-\frac{1}{2}+\ln 2$		
		↗		↘	
		$-\infty$			$-\infty$

$$f(2) = \frac{-2+1}{2} + \ln 2$$
$$= -\frac{1}{2} + \ln 2$$

3-a) Vérifions que $f(1) = 0$

$$f(1) = \frac{-1+1}{2} + \ln 1$$
$$= \frac{0}{2} + 0$$
$$f(1) = 0$$

3-b) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]3{,}5\,;4[$

f est continue et strictement décroissante sur $]2\,;+\infty[$ d'où sur $]3{,}5\,;4[$

$$\left(\lim_{x\to 3{,}5} f(x)\right) \times \left(\lim_{x\to 4} f(x)\right) = \left(\frac{-3{,}5+1}{2} + \ln 3{,}5\right)\left(\frac{-4+1}{2} + \ln 4\right)$$
$$= -0{,}0003$$

$$\left(\lim_{x\to 3{,}5} f(x)\right) \times \left(\lim_{x\to 4} f(x)\right) < 0$$

Alors $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]3{,}5\,;4[$

3-c) Donnons un encadrement de $\propto$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1

Méthode par Balayage

x	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
$f(x)$	0,002	-0,019	-0,041	-0,065	-0,089	-0,114

$$-0{,}019 < 0 < 0{,}002 \quad alors \quad 3{,}5 < \propto < 3{,}6$$

4) Voir Annexe

5-a) Justifions que la fonction F définie par $F(x) = \frac{-x^2}{4} - \frac{1}{2}x + x\ln x$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$

F est définie sur $]0\,;+\infty[$ et est dérivable

$$F'(x) = \left(\frac{-x^2}{4} - \frac{1}{2}x + x\ln x\right)'$$

$$= -\frac{2x}{4} - \frac{1}{2} + 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = \frac{-x+1}{2} + \ln x$$

$$F'(x) = f(x)$$

5-b) Calculons A

$$A = (2 \times 5 \int_1^e f(x)dx)cm^2$$

$$\int_1^e f(x)dx = [Fx)]_1^e$$

$$= F(e) - F(1)$$

$$= \left(-\frac{e^2}{4} - \frac{e}{2} + e\ln e\right) - (\frac{-1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \times \ln 1)$$

$$= \frac{-e^2 + 2e + 3}{4}$$

$$A = 10 \times \frac{-e^2 + 2e + 3}{4}$$

$$A = \frac{5}{2}(-e^2 + 2e + 3)\ cm^2$$

5-c) Pour $e = 2{,}7$

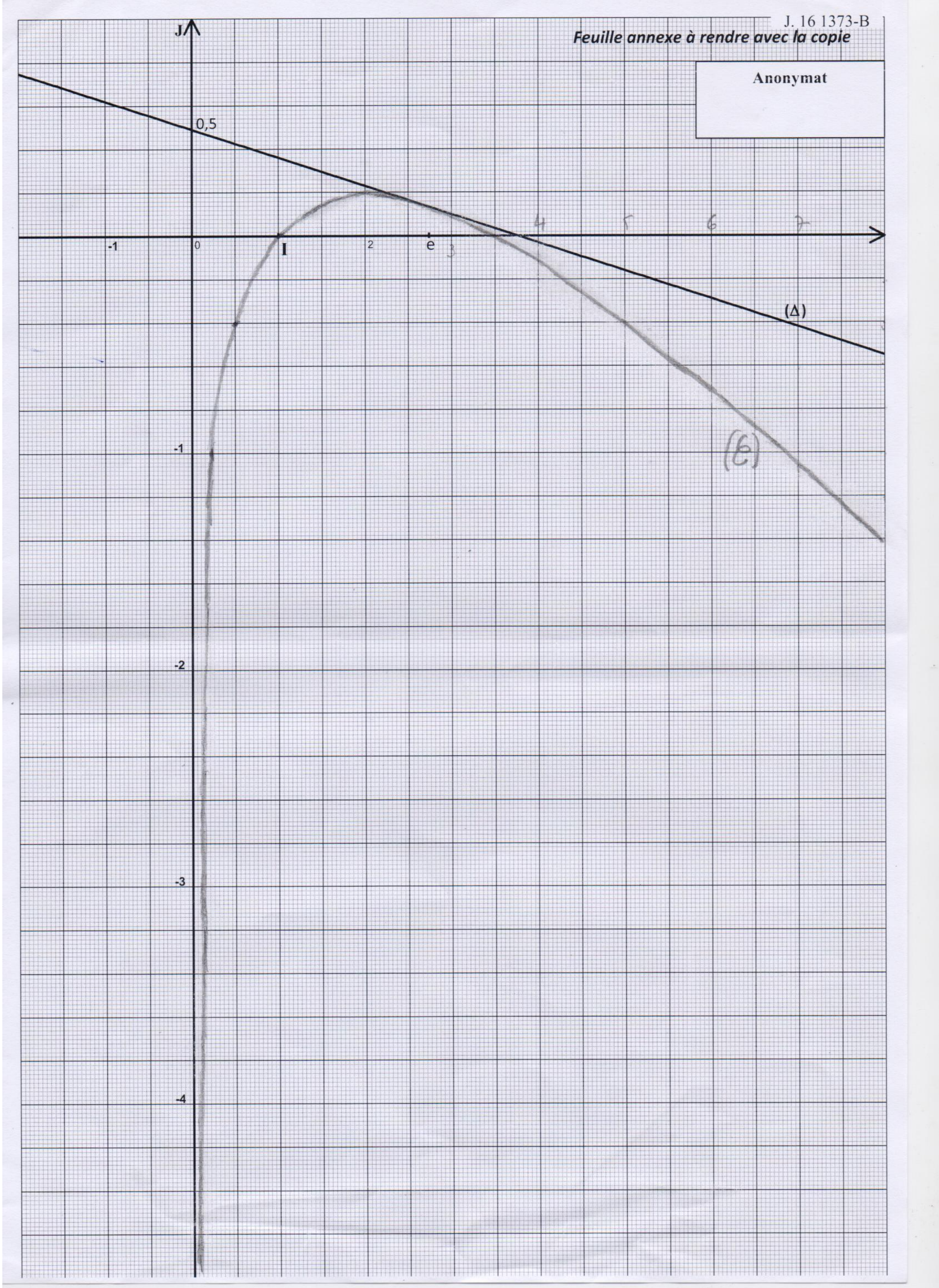
$$A = \frac{5}{2}[-(2{,}7)^2 + 2 \times 2{,}7 + 3]$$

$$= 2{,}5(-7{,}29 + 5{,}4 + 3)$$

$$= 2{,}5 \times 1{,}11$$

$$A = 2{,}775 cm^2$$

ANNEXE


J. 16 1373-B
Feuille annexe à rendre avec la copie
Anonymat
J
0,5
-1
0
I
2
e
3
4
5
6
7
(Δ)
(C)
-1
-2
-3
-4