BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2016 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\ln(n+1) + \ln(n+2) + \ldots + \ln(n+n) - n\ln(n)}{n}.$$

1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,
$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \ldots + \ln(1+\frac{n}{n})\right]$.

2- *a*) Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k+1}{n}).$$

(*On pourra utiliser un encadrement de* $\ln(x)$ *sur l'intervalle* $[1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}]$.)

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n$.

3- Sachant que $\int_1^2 \ln(x)dx = 2\ln(2) - 1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

1- On note $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) tels que :
$14z\overline{z} + 16i(z - \overline{z}) = z^2 + \overline{z}^2$.
Démontrer que M appartient à $(\mathscr{C})$ si et seulement si :

$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$.

2- *a*) Justifier que $(\mathscr{C})$ est une ellipse. On note Ω son centre.
b) Préciser les coordonnées de Ω.

c) Déterminer une équation de l'axe focal de $(\mathscr{C})$.

d) On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives

$$\frac{-2\sqrt{3}}{3}+i,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}+i,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}+i \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{3}+i.$$

Justifier que A et A' sont les sommets de $(\mathscr{C})$ situés sur son axe focal.
Justifier que F et F' sont les foyers de $(\mathscr{C})$.

3- Construire l'ellipse $(\mathscr{C})$.

4- On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.

a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est :
$3x^2 - y^2 = 1$.

b) Tracer les asymptotes de (H).

c) Construire (H).

PROBLÈME

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.
On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|.$$

1- *a*) Calculer la limite de f en 0.

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Démontrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,-\frac{1}{4}[$ et $]0\,;\,+\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}\,;\,0[$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2- Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3 < \alpha < 4$.

3- Démontrer que :
$\forall\, x \in]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,\alpha[,\ f(x) < 0$;
$\forall\, x \in]\alpha\,;\,+\infty[,\qquad f(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \dfrac{31}{16}x^2 - \dfrac{1}{8}x^2\ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1- *a*) Démontrer que h est dérivable en 0.

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = xf(\frac{1}{x})$.

c) Démontrer en utilisant A-3) que :

$\forall x \in]-\infty\,;0[\cup]0\,;\frac{1}{\alpha}[$, $h'(x) > 0$;

$\forall x \in]\frac{1}{\alpha}\,;+\infty[$, $\quad h'(x) < 0$.

2- On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $[-1\,;\frac{3}{2}]$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Tracer la tangente (Γ) en son point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe (Γ). (*On prendra $\alpha = 3{,}6$.*)

3- λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_\lambda^1 x^2\ln(x)dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda.$$

b) On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ),

la droite de repère $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Déduire de la question précédente que :

$$\mathcal{A}(\lambda) = (\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3\ln(\lambda))\text{ cm}^2.$$

c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

1- Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et définie par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln(x)$.

a) Étudier les variations de g.

b) Démontrer que l'image de l'intervalle $[3\,;4]$ par g est contenue dans l'intervalle $[3\,;4]$.

c) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) = x$.

2- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3 \leq u_n \leq 4$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c) Démontrer que, pour tout x élément de $[3\,;4]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n,

$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$ puis que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$.

En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.