# MATHEMATIQUES SERIE D BAC - 2016



## Exercice 1

1- On considère la fonction $h$ dérivable et définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $h(x) = 2x - x^2$.

a) Démontrons que $h$ est strictement croissante sur $[0;1]$.

* Calcul de la dérivée $h'$

$$h(x)' = (2x - x^2)'$$
$$= 2 - 2x$$
$$= 2(1-x)$$

* Etude du signe de $h'(x)$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 2(1-x) = 0$$
$$\Rightarrow 1 - x = 0$$
$$\Rightarrow x = 1$$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$h'(x)$ est positive lorsque $x$ est élément de l'intervalle $[-\infty;1]$ et en particulier lorsque $x$ est élément de $[0;1]$. D'où $h$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

b) Deduisons-en que l'image $h([0;1]) = [0;1]$.

$h$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$, alors : $h([0;1]) = [h(0); h(1)]$.

$h(0) = 2\times 0 - 0^2$

$h(0) = 0$

$h(1) = 2\times 1 - 1^2$

$= 2 - 1$

$h(1) = 1$

Donc $\boxed{h([0;1]) = [0;1]}$.

2 – Soit $u$ la suite définie par : $u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_{n+1} = h(u_n)$

a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $0 < u_n < 1$.

- $u_0 = \frac{3}{7}$ ; $0 < \frac{3}{7} < 1$ donc $0 < u_0 < 1$.
- Supposons que pour tout nombre entier naturel $k$ ; $0 < u_k < 1$

Ainsi $0 < h(u_k) < 1$ car $\forall x \in [0;1]$ ; $h(x) \in [0,1]$.

D'où $0 < u_{k+1} < 1$

- Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $0 < u_n < 1$.

b) Démontrons que la suite $u$ est croissante

Procédons par récurrence

- $u_0 = \frac{3}{7}$

$u_0 \simeq 0{,}428$

$u_1 = h(u_0)$

$u_1 = 2u_0 - u_0^2$

$= 2 \times \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{7}\right)^2$

$= \frac{6}{7} - \frac{9}{49}$

$u_1 = \frac{33}{49}$

$u_1 \simeq 0{,}673$

Donc $u_0 < u_1$

- Supposons que pour tout nombre réel $k$ :

$u_k < u_{k+1}$

Ainsi $h(u_k) < h(u_{k+1})$ car $h$ est strictement croissante.

D'où $u_{k+1} < u_{k+2}$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n < u_{n+1}$

La suite $u$ est donc croissante.

c) Justifions que la suite $u$ est convergente.

La suite $u$ est bornée et croissante alors est convergente.

3.- On (2) considère la suite $v$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1-u_n)$

a/ Démontrons que $v$ est une suite géométrique de raison 2.

$v_n = \ln(1-u_n)$ donc $v_{n+1} = \ln(1-u_{n+1})$

$$= \ln[1-h(u_n)]$$

$$= \ln[1-(2u_n-u_n^2)]$$

$$= \ln(1-2u_n+u_n^2)$$

$$= \ln[(1-u_n)^2]$$

$$= 2\ln(1-u_n)$$

$$\underline{v_{n+1} = 2v_n}$$

D'où $v$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

b ) Exprimons $v_n$ en fonction de $n$.

$v_n = q^{n-p} \times v_p$ (avec $p \leq n$).

Ici $p = 0$ donc $v_n = 2^n \times v_0$.

$v_0 = \ln(1-u_0)$

$= \ln\left(1-\frac{3}{7}\right)$

$v_0 = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$ alors $\underline{v_n = 2^n \ln\left(\frac{4}{7}\right)}$.

c) Calculons la limite de la suite $v$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \ln\left(\frac{4}{7}\right)$

$2^n = e^{n\ln 2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n\ln 2} = +\infty$

$\frac{4}{7} < 1$ donc $\ln\frac{4}{7} < 0$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty}$.

d) Déduisons-en la limite de $U$.

$V_n = \ln(1-U_n) \Rightarrow e^{V_n} = e^{\ln(1-U_n)}$

$\Rightarrow e^{V_n} = 1-U_n$

$\Rightarrow U_n = 1 - e^{V_n}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-e^{V_n})$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1}$.

Exercice 2

On considère la transformation $S$ du plan qui, à tout point M d'affixe $z$, associe le point M' d'affixe $z'$ telle que :

$z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

1-a) Soit $\Omega$ le point d'affixe 2, Vérifions que $S(\Omega) = \Omega$.

Soit $\Omega'$ l'image de $\Omega$ par $S$.

$z_{\Omega'} = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_{\Omega} + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times 2 + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$= 2 - 2i\frac{\sqrt{3}}{3} + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$z_{\Omega'} = 2$

$z_{\Omega'} = z_\Omega$, donc $S(\Omega) = \Omega$.

b) Justifions que $S$ est une similitude dont nous préciserons les éléments caractéristiques.

$z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Calculons un argument et le module de $1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\left|1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{3}{9}}$$
$$= \sqrt{\frac{9+3}{9}}$$
$$= \sqrt{\frac{12}{9}}$$

$$\left|1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Soit $\theta$ un argument de $1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\cos\theta = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \qquad \sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{3}} \qquad = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{3}}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2\times 3} \qquad \sin\theta = \frac{1}{2}$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$S$ est donc une similitude directe de ~~rappor~~ centre $\Omega$ de rapport $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

6

2 - a) Démontrons que : $\forall z \neq 2$ ; $\frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\frac{z'-z}{2-z} = \frac{\left(1-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} - z}{2-z}$$

$$= \frac{z\left(1-i\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right) + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}}{2-z}.$$

$$= \frac{2i\frac{\sqrt{3}}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3}z}{2-z}.$$

$$= \frac{i\frac{\sqrt{3}}{3}(2-z)}{2-z}$$

$$\boxed{\frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

b) Deduisons-en que le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M.

$$\frac{z_{M'}-z_M}{z_\Omega - z_M} = \frac{z'-z}{2-z}$$

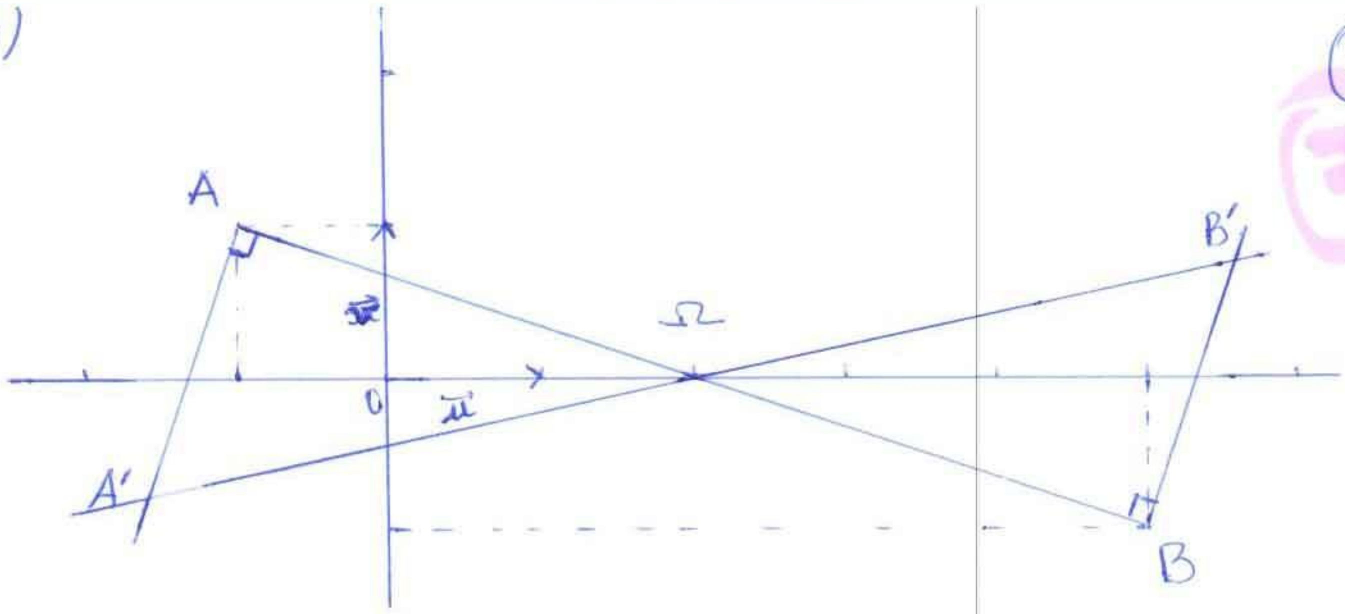
$$= i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Alors $M\Omega M'$ est un triangle rectangle en M.

c) Programme de construction du point M'.

* Construire la perpendiculaire à $(\Omega M)$ passant M.
* Placer sur cette perpendiculaire M' tel que $Mes(\widehat{\vec{\Omega M}; \vec{\Omega M'}}) = \frac{\pi}{6}$.

3-a)




3-b/ Démontrons que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$

$$z_{A'} - z_A = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_A + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} - z_A$$

$$= \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(-1+i) + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} - (-1+i)$$

$$= -1 + i + i\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - i$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + 3i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{z_{A'} - z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + i\sqrt{3}}$$

$$z_B - z_{B'} = z_B - \left[\left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_B + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$= 5 - i - \left[\left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(5 - i) + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$= 5 - i - \left(5 - i - 5i\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= 5 - i - 5 + i + 5i\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + 3i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{z_B - z_{B'} = \frac{\sqrt{3}}{3} + i\sqrt{3}}$$

Ainsi $\boxed{z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}}$

3-c) Déduisons-en la nature du quadrilatère AA'BB'

$$z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'} \Rightarrow z_{\overrightarrow{AA'}} = z_{\overrightarrow{B'B}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'B}$$

Alors AA'BB' est un parallélogramme.

8

# PROBLEME

## Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -1 + (2-2x)e^{-2x+3}$$

1 - Calculons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[-1 + (2-2x)e^{-2x+3}\right]$$

Posons $X = -2x$ : quand $x \to -\infty$ ; $X \to +\infty$ Ainsi

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{X \to +\infty}\left[-1 + (2+X)e^{X+3}\right]$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{X \to +\infty} (2+X) = +\infty \\ \lim_{X \to +\infty} e^{X+3} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[-1 + (2-2x)e^{-2x+3}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[-1 + 2e^{-2x+3} - 2xe^{-2x+3}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[-1 + 2e^3 \times e^{-2x} - 2x e^{-2x} \times e^3\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[-1 + e^3\left(2e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right)\right]$$

Posons $X = -2x$ ; quand $x \to +\infty$ ; $X \to -\infty$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{X \to -\infty}\left[-1 + e^3\left(2e^X - Xe^X\right)\right]$$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -1}$ car $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} 2e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} xe^{x} = 0 \end{cases}$

2-a) Justifions que : $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $g'(x) = (4x-6)e^{-2x+3}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \left[-1 + (2-2x)e^{-2x+3}\right]'$

$$g'(x) = (2-2x)'e^{-2x+3} + (2-2x)\left(e^{-2x+3}\right)'$$

$$= -2e^{-2x+3} - 2e^{-2x+3} \times (2-2x)$$

$$= \left[-2 - 2(2-2x)\right]e^{-2x+3}$$

$$= (-2-4+4x)e^{-2x+3}$$

$$\boxed{g(x)' = (4x-6)e^{-2x+3}}$$

2-b) Etudions le signe de $g'(x)$.

$e^{-2x+3} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x)$ a le signe de $(4x-6)$

$4x-6 < 0 \Rightarrow x < \frac{6}{4} \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

$4x-6 > 0 \Rightarrow x > \frac{6}{4} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

Alors $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; \frac{3}{2}[ \text{ ; } g'(x) < 0 \\ \forall x \in ]\frac{3}{2} ; +\infty[ \text{ ; } g(x) > 0 \\ g'(x) = 0 \text{ quand } x = \frac{3}{2} \end{cases}$

2-c) Justifions que $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -1 + \left(2 - 2\times\frac{3}{2}\right)e^{-2\times\frac{3}{2}+3}$$

$$= -1 + (2-3)e^{-3+3}$$

$$= -1 - e^{0}$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -1-1$$

Donc

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -2.$$

10

2d) Dressons le tableau de variation de g

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $-1$ |

3-a) Demontrons que l'equation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée $\alpha$.

- $g$ est continue et strictement decroissante sur $]-\infty ; \frac{3}{2}[$ et $\left[\lim_{x \to -\infty} g(x)\right] \times g\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ alors $g(x)=0$ a une solution dans $]-\infty ; \frac{3}{2}[$.
- $g$ est continue et strictement croissante sur $]\frac{3}{2} ; +\infty[$ et pour tout $x$ élément de $]\frac{3}{2} ; +\infty[$ ; $g(x) < -1$ alors $g(x)=0$ n'a pas de solution dans $]\frac{3}{2} ; +\infty[$.

Alors l'equation $g(x)=0$ une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

3-b) Verifions que $0,86 < \alpha < 0,87$.

$g(0,86) = -1 + (2-2\times 0,86)e^{-2\times 0,86+3}$

$= -1 + 0,28\, e^{1,28}$

$g(0,86) = 0,007$.

$g(0,87) = -1 + (2-2\times 0,87)e^{-2\times 0,87+3}$

$= -1 + 0,26\, e^{1,26}$

$g(0,87) = -0,083$.

$g$ est continue et strictement décroissante sur $[0,86 ; 0,87]$ et $g(0,86)\times g(0,87) < 0$ alors $\alpha \in [0,86 ; 0,87]$ donc $0,86 < \alpha < 0,87$.

3-c) Justifions que $\forall x \in ]-\infty ; \alpha[ ; g(x) > 0$ et $\forall x \in ]\alpha ; +\infty[ ; g(x) < 0$

- $g$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; \alpha[$ ; alors
  $\forall x \in ]-\infty ; \alpha[ \ g(x) > g(\alpha)$, d'où $\forall x \in ]-\infty ; \alpha[ ; g(x) > 0$.
- $g$ est continue et strictement décroissante sur $]\alpha ; \frac{3}{2}[$ ; alors
  $\forall x \in ]\alpha ; \frac{3}{2}[ \ g(x) < g(\alpha)$, d'où $\forall x \in ]\alpha ; \frac{3}{2}[$ ~~alors~~ $g(x) < 0$
- $g$ est continue et strictement croissante sur $]\frac{3}{2} ; +\infty[$ alors
  $\forall x \in ]\frac{3}{2} ; +\infty[ \ g(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ donc $g(x) < -1$ d'où
  $\forall x \in ]\frac{3}{2} ; +\infty[ \ g(x) < 0$

Conclusion

$\forall x \in ]-\infty ; \alpha[ ; g(x) > 0$ et $\forall x \in ]\alpha ; +\infty[ ; g(x) < 0$.

## Partie B

On considère la fonction $f$ dérivable et définie par :

$f(x) = -x + (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3}$.

1-a) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[ -x + (x + \tfrac{1}{2})e^{-2x+3} \right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(-1 + \frac{x + \frac{1}{2}}{x} e^{-2x+3}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} * \lim\limits_{x \to -\infty} -2x+3 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x+3} = +\infty \\ * \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \frac{1}{2}}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

12

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+(x+\frac{1}{2})e^{-2x+3}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-1+\frac{x+\frac{1}{2}}{x}e^{-2x+3}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{2}}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x+3}=+\infty.\end{cases}$

1-b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction $(OJ)$ en $-\infty$.

2-a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]$$

Posons $\begin{cases}X=-2x+3\text{, quand } x\to+\infty;\ X\to-\infty\\ x=\frac{3-X}{2}\quad\text{et}\quad x+\frac{1}{2}=\frac{4-X}{2}\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{X\to-\infty}\left[-\frac{3-X}{2}+\frac{4-X}{2}e^{X}\right]$$

$$=\lim_{X\to-\infty}\left[-\frac{3}{2}+\frac{X}{2}+2e^{X}-\frac{1}{2}Xe^{X}\right]$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$ car $\begin{cases}\lim\limits_{X\to-\infty}\frac{X}{2}=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}2e^{X}=0\\ \lim\limits_{X\to-\infty}\frac{1}{2}Xe^{X}=0\end{cases}$

13

2.b) Démontrons que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[-x + \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3} + x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$$

posons $X = -2x + 3$ quand $x \to +\infty$ ; $X \to -\infty$

$$x = \frac{3 - X}{2}$$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{X \to -\infty} \left(\frac{4 - X}{2} e^{X}\right)$

$$= \lim_{X \to -\infty} 2e^{X} - \frac{1}{2} X e^{X}$$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = 0$ car $\begin{cases} \lim_{X \to -\infty} e^{X} = 0 \\ \lim_{X \to -\infty} X e^{X} = 0 \end{cases}$

Alors la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$.

2-c) Etudions la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

$f(x) - y = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$ ;

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-2x+3} > 0$ alors $f(x) - y$ a le même signe de $\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

$x + \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x > +\frac{1}{2}$ et $x + \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x < +\frac{1}{2}$

$(\mathcal{C})$ est en dessous de $(\mathcal{D})$ sur $]-\infty ; +\frac{1}{2}[$ et $(\mathcal{C})$ est au dessus de $(\mathcal{D})$ sur $]+\frac{1}{2} ; +\infty[$.

3-a) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = g(x)$.

$f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \left[-x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]'$$

$$= -1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)' e^{-2x+3} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(e^{-2x+3}\right)'$$

$$= -1 + e^{-2x+3} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$$

$$= -1 + \left[1 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]e^{-2x+3}$$

$$= -1 + (1 - 2x + 1)e^{-2x+3}$$

$$= -1 + (-2x + 2)e^{-2x+3}$$

$$f'(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$$

$$f'(x) = g(x)$$

3-b) Déduisons-en les variations de $f$.

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \alpha[ \; g(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[ \; g(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \; \forall x \in ]-\infty; \alpha[ \\ f'(x) < 0 \; \forall x \in ]\alpha; +\infty[ \end{cases}$$ alors

$f$ est croissante sur $]-\infty; \alpha[$ et décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

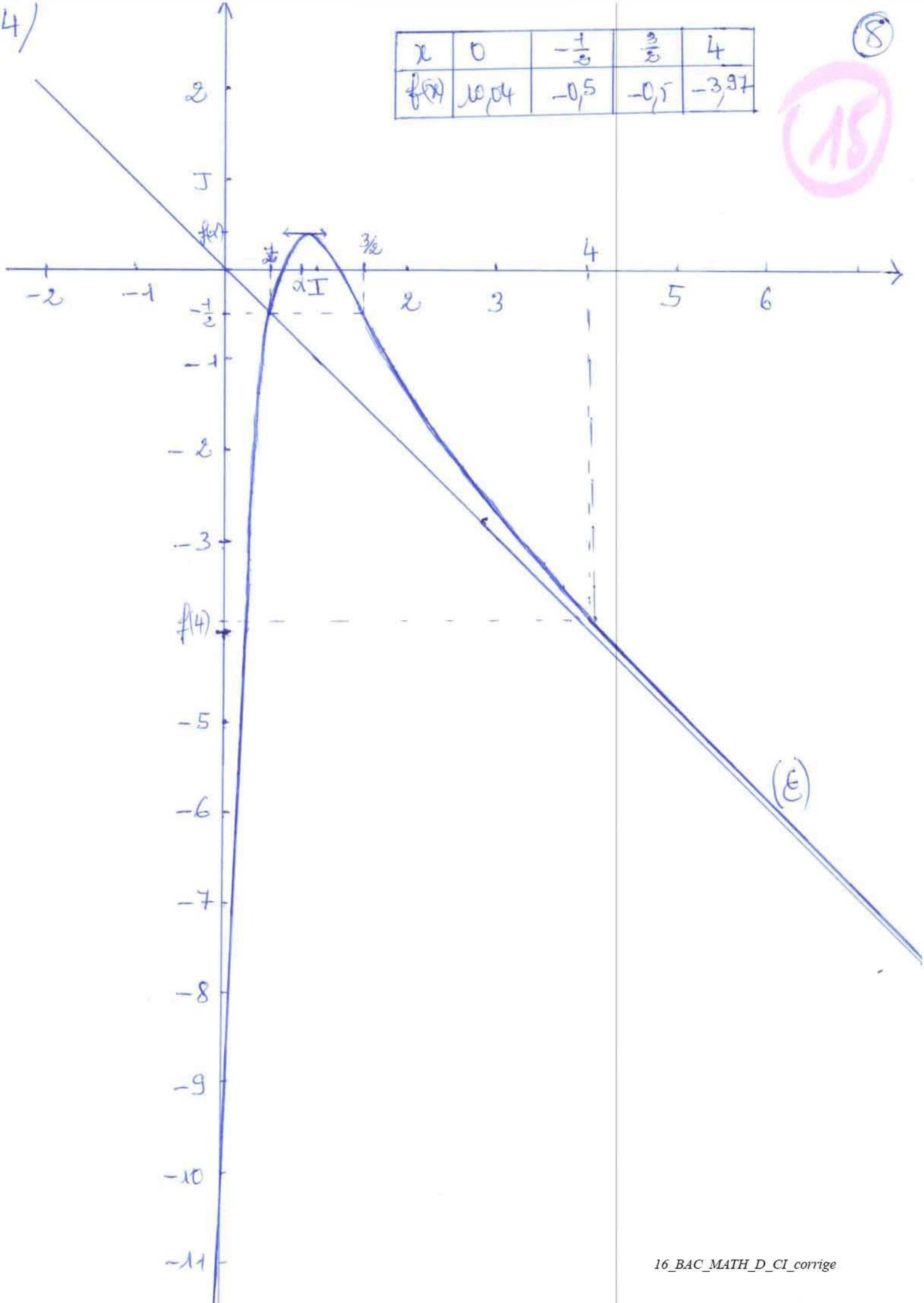
3c) Dressons le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

15

4)

| $x$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 10,04 | $-0,5$ | $-0,5$ | $-3,97$ |



16

5/ On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3}\, dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, justifions que $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}$.

$$I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3}\, dx$$

Posons $u(x) = x - \frac{1}{2}$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$

$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x+3}$

$$I_t = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2} e^{-2x+3}\right)\right]_{\frac{3}{2}}^{t} - \int_{\frac{3}{2}}^{t} 1 \times \left(-\frac{1}{2} e^{-2x+3}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t} + \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{t} e^{-2x+3}\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3} - \frac{1}{2} e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x e^{-2x+3} + \frac{1}{2} e^{-2x+3} - \frac{1}{2} e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t}$$

$$I_t = \frac{1}{2}\left(-t e^{-2t+3} + \frac{3}{2} e^{-2 \times \frac{3}{2} + 3}\right)$$

$$I_t = \frac{1}{2}\left(-t\,e^{-2t+3} + \frac{3}{2}e^{0}\right)$$

$$= -\frac{t}{2}e^{-2t+3} + \frac{3}{4}$$

$$\boxed{I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}}$$

b/ Déduisons-en $A(t)$

$$A(t) = \left[\int_{\frac{3}{2}}^{t} (f(x) - y)\,dx\right] \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A(t) = \left[\int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\,dx\right] \times 4$$

$$A(t) = 4 \times I_t$$

$$A(t) = 4\left(\frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}\right)$$

$$\boxed{A(t) = 3 - 2t\,e^{-2t+3}}$$

c) Calculons $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t)$

$$\lim_{t\to+\infty} A(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(3 - 2t\,e^{-2t+3}\right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(3 - e^{3} \times 2t\,e^{-2t}\right)$$

Posons $T = -2t$ quand $t \to +\infty$, $T \to -\infty$

18

Ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t) = \lim\limits_{T \to -\infty} \left[3 + e^{3} T e^{T}\right]$

$\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} A(t) = 3}$ car $\lim\limits_{T \to -\infty} T e^{T} = 0.$