MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

DREN ABIDJAN 1

UNITE PEDAGOGIQUE COCODY 3

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

UNION-DISCIPLINE -TRAVAIL

BACCALAUREAT BLANC N°1

SESSION DE FEVRIER 2016

Série : C

Durée : 4h

EPREUVE : **MATHEMATIQUES**

Exercice 1

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle [1 ; 46].

1. On considère l'équation (E) : $23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Donner une solution particulière $(x0, y0)$ de (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
   c) En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1$ [47].
2. Soient a et b deux entiers relatifs.
   a) Démontrer que si $ab \equiv 0$ [47] alors $a \equiv 0$ [47] ou $b \equiv 0$ [47]
   b) En déduire que si $a^2 \equiv 1$ [47] alors $a \equiv 1$ [47] ou $a = \equiv -1$ [47]
3. a) Démontrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que :

   $p \times q \equiv 1$ [47].

   Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté inv(p), appartenant à A tel que $p \times \text{inv}(p) \equiv 1$ [47].

   Par exemple :

inv(1) = 1	car	$1 \times 1 \equiv 1$ [47]
inv(2) = 24	car	$2 \times 24 \equiv 1$ [47]
inv(3) = 16	car	$3 \times 16 \equiv 1$ [47]

   b) Quels sont les entiers p de A qui vérifient p = inv(p) ?

   c) Démontrer que $46! \equiv -1$ [47]

Exercice 2

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure. Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe z' :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1

1) Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E', image de E par f.
2) Déterminer l'ensemble des points M tels que M' = M.
3) Soit M un point distinct des points O, A et B.

a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

b) En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{M'A}\ \overrightarrow{M'B}})$ en fonction de celle de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$.

4) Soit (Δ) la médiatrice du segment [AB]. Démontrer que si M est un point de (Δ) distinct de O, alors M' est un point de (Δ).

5) Soit (Γ) le cercle de diamètre [AB].

a) Démontrer que si le point M appartient à (Γ) alors le point M' appartient à la droite (AB).

b) Vérifier que tout point de la droite (AB) admet un antécédent par f.

PROBLEME

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x\,e^{-x}$

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) a) Démontrer que : $\forall x \in$ IR, $f'(x) = (1 - x)\,e^{-x}$

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) a) Démontrer l'équation $f(x) = \frac{-1}{2}$ admet une unique solution λ dans IR tel que : $-0{,}36 < \lambda < -0{,}35$

b) En déduire que : $\forall x \in]-\infty ; \lambda[, 1 + 2f(x) < 0$

$\forall x \in]\lambda ; +\infty[, 1 + 2f(x) > 0$

On admet que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution β dans IR et que $-0{,}57 < \beta < -0{,}56$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = f(x) + [f(x)]^2$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 4 cm.

1)a) Calculer la limite de g en $+\infty$ et l'interpréter graphiquement.

b) Calculer la limite $g(x)$ puis de $\frac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

En donner une interprétation graphique.

2) a) Démontrer que : $\forall x \in$ IR, $g'(x) = f'(x)\,[1 + 2f(x)]$

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Démontrer que : $g(\lambda) = -\frac{1}{4}$

3) Démontrer que (C) et (OI) se coupent en deux points d'abscisses O et β.

Partie C

On veut démontrer que : $\forall x \in$ IR*, $1 + xe^{-x} < 1 + x < e^{x}$

1) Soit h définie sur IR par h $(x) = xe^{-x} - x$
   a) Démontrer que $\forall x \in$ IR, $h''(x) = (-2 + x)\, e^{-x}$
   b) Calculer les limites de h' en $-\infty$ et en $+\infty$
   c) Dresser le tableau de variation de h'.
   d) Calculer h'(0) et en déduire le signe de h' sur IR
   e) Dresser le tableau de variation de h, puis en déduire son signe sur IR.
2) Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = 1 + x\, e^{x}$
   a) Déterminer φ' sur IR
   b) Dresser le tableau de variation de φ (on ne calculera pas les limites de φ) et en déduire son signe.
3) Déduire des études ci-dessus que : $\forall x \in$ IR* $1 + xe^{-x} < 1 + x < e^{x}$

Partie D

1) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse O.
2) Démontrer que : $\forall x \in$ IR, g $(x) - x = xe^{-x}(1 + xe^{-x} - e^{x})$
3) En déduire les positions relatives de (C) et (T).
4) Construire (C) et (T) dans le même repère.

   Prendre $\lambda \approx -0,35$; $\beta = -0,56$ et $e \approx 2,7$.