

BACCALAUREAT BLANC REGIONAL

Coefficient : 5

SESSION AVRIL 2016

Durée : 4 h

MATHEMATIQUES**Série C**

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE I

Soit les équations $(E) : (x; y) \in \mathbb{Z}^2, 19x + 29y = 1$ et $(E') : (x; y) \in \mathbb{Z}^2, 19x + 29y = 818$

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de (E) .
2. a) En déduire une solution particulière de (E') .
b) Résoudre l'équation (E') .
3. Pour assister aux spectacles qu'il organise, un centre culturel propose deux tarifs à ses clients.

Un tarif de 1900 francs pour les abonnés et un tarif de 2900 francs pour les non abonnés.

A la fin d'un spectacle, le montant total des recettes s'est élevé à 81 800 francs. La caissière a égaré la souche du carnet de vente. Elle se rappelle seulement que le nombre d'abonnés présents à ce spectacle est compris entre 10 et 15. On note x le nombre d'abonnés présents à ce spectacle et y le nombre de non abonnés présents à ce spectacle.

- a) Justifier que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E') .
- b) Déterminer x et y .

EXERCICE II

- I. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points B, C, E et D d'affixes respectives $-1, 3, 3 + 4i$ et z_0 où z_0 est un nombre complexe.

1. Placer les points B, C et E.
2. a) Démontrer que le triangle BDE est rectangle isocèle en D de sens indirect si et seulement si $z_0 = -1 + 4i$.

Dans la suite, z_0 aura cette valeur.

- b) Placer le point D et démontrer que le quadrilatère BDEC est un carré.

- II. Soit O le centre du carré BDEC défini ci-dessus, A le symétrique de D par rapport à B et Δ la médiatrice du segment [BD].

On note $f = S_{\Delta} \circ t_{\overline{AC}} \circ S_{(BC)}$ et r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer $t_{\overline{AB}} \circ S_{(BC)}(C)$.
2. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de $t_{\overline{AB}} \circ S_{(BC)}$

3. Démontrer que $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(BC)} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{\Delta}$
4. En déduire que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
5. a) Déterminer $for(C)$.
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de for .
6. a) Construire le point F tel que $F = for(D)$
b) Démontrer que $for(A) = D$.
c) En déduire que les points A, C et F sont alignés.

PROBLEME

PARTIE A

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = ae^x + be^{-x}$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer a et b tels que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) - \varphi(x) = 0$

Dans toute la suite, on admettra que cette fonction φ est l'unique fonction vérifiant le système

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{où } y \text{ désigne une fonction deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.$$

PARTIE B

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$ et (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2cm).

1. Etudier la parité de f et en donner une interprétation graphique.
2. On se propose d'étudier f sur $[0; +\infty[$.
a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.
b) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $[0; +\infty[$.
c) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[2; 3]$
(On pourra étudier la fonction $v : x \mapsto f(x) - x$ sur $[2; 3]$)
b) Vérifier que $2,1 < \alpha < 2,2$
4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
c) Tracer (T) et (C_f) dans le plan muni du repère (O, I, J) .
(On fera apparaître le point d'abscisse α)

5. a) Justifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
 b) Tracer la courbe représentative (C_g) de la bijection réciproque g de f sur le même graphique que (C_f) .
6. Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2})$.
 (On pourra résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}, f(x) = t$, où $t \in \mathbb{R}$)

PARTIE C

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} dt$. (On ne cherchera pas à déterminer une primitive de la fonction : $t \mapsto \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$)

1. a) On suppose G dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer $G'(x)$.
 b) Déterminer le sens de variation de G .
 c) Démontrer que G est impaire (on pourra poser $u = -t$).
2. a) Justifier que $\forall t \geq 0, \frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$
 b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[, \ln(1 + 2x) \leq G(x)$
 c) En déduire la limite de G en $+\infty$.
3. a) Démontrer que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
 b) Soit F la bijection réciproque de G . Justifier que $F(0) = 0$ et $F'(0) = \frac{1}{2}$.
 c) On admettra que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4(F(x))^2}$ et que $F''(x) - F(x) = 0$.
 d) En utilisant la partie A, démontrer que $F = f$ et que $G = g$.

PARTIE D

On pose : $\forall t \geq 1, h(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ et $\forall x \geq 1, H(x) = \int_1^x h(t)dt$

1. a) Démontrer que : $\forall t \geq 1, 0 \leq h(t) \leq \frac{1}{8t^3}$
 b) Démontrer que : $\forall x \geq 1, 0 \leq H(x) \leq \frac{1}{16} - \frac{1}{16x^2}$.
 c) En déduire que $H(x)$ admet une limite finie l lorsque x tend vers $+\infty$. (On ne calculera pas l)
2. a) Démontrer que $\forall x \geq 1, H(x) = G(1) - (G(x) - \ln x)$
 b) En déduire que $G(x) - \ln x$ admet $G(1) - l$ comme limite lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer l (on pourra utiliser la relation $G = g$)