



Collèges Catholiques
Notre Dame d'Afrique & Saint-Jean Bosco

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
 Union - Discipline - Travail
 MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
 ET DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

EXAMENS BLANCS CONJOINTS
SESSION JANVIER 2016

BAC - ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 H

Série C Coefficient : 05

*Cette épreuve comporte trois pages numérotées page 1 sur 3, page 2 sur 3 et page 3 sur 3.
 Le candidat aura besoin d'un papier millimétré.*

Exercice : 1 5 points

Soit l'équation (E) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \text{ où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

- 1) On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (E).
 - a- Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1129$.
 - b- Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.
Vérifier que le couple $(-25; 9)$ est solution de cette équation.
 - c- En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1129$.
Résoudre cette équation.
 - d- Déterminer, parmi les couples $(u; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.
- 2) a- Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
 - b- Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (E).
Démontrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.
 - c- En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (E) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Exercice : 2 5 points

Partie A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(Z) = Z^3 + (-3\sqrt{3} + i)Z^2 + 12Z - 12\sqrt{3} - 12i$.

- 1) Démontrer que le nombre complexe $Z_0 = 2\sqrt{3}$ est solution de l'équation $P(Z) = 0$.
- 2) a- Déterminer les réels a et b tels que $P(Z) = (Z - 2\sqrt{3})(Z^2 + aZ + b)$.
b- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 2i$.

- 1) a- Ecrire a , b et c sous forme exponentielle.
b- Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
- 2) On désigne par P le barycentre du système $\{(A, 1); (C, 3)\}$ et Q le barycentre du système $\{(A, 2); (B, 1)\}$.
a- Justifier que l'affixe p du point P est égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.
b- Déterminer l'affixe q du point Q.
- 3) a- Démontrer que le quotient $\frac{p-c}{p-b}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer.
b- En déduire que, dans le triangle ABC, le point P est le pied de la hauteur issue de B. Placer le point P.
c- Démontrer que le point Q possède une propriété analogue. Placer le point Q.
- 4) On désigne par J le barycentre du système $\{(A, 2); (B, 1); (C, 6)\}$.
Démontrer que le point J est le point d'intersection des droites (BP) et (CQ).
Qu'en déduit-on pour le point J ?
- 5) On pose $Z' = \frac{z-2i}{z-\sqrt{3}+3i}$.
a- Déterminer l'ensemble (E_1) des points M du plan d'affixe z tel que $|Z'| = 2$.
b- Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tel que $\text{mes}(\vec{MB}, \vec{MC}) = \frac{5\pi}{3}$.

Problème 10 points

Pour chaque entier naturel n , on définit, sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction f_n telle que

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x.$$

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A (Dans toute cette partie $n = 0$).

f_0 est donc la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

- 1) En utilisant l'inégalité, pour tout x élément de l'intervalle $]0; +\infty[$ on a $\ln x \leq x-1$.
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x \geq x + 1$.
- 2) Calculer la limite de la fonction f_0 en 0 et en $+\infty$.
- 3) On note f'_0 la fonction dérivée de f_0 sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
a- Justifier que $f'_0(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.

- b- En utilisant la question 1), démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.
- c- En déduire le sens de variation de la fonction f_0 .
- d- Dresser le tableau de variation de la fonction f_0 .
- e- Construire (C_0) et placer le point $A(0,1)$.

Partie B (Dans cette partie $n \geq 1$)

- 1) Calculer la limite de la fonction f_n en 0 et en $+\infty$. En déduire que la courbe (C_n) possède une asymptote qu'on précisera.
- 2) Soit f'_n la dérivée de la fonction f_n sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a- Déterminer f'_n .
 - b- Démontrer que f'_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 - c- Dresser le tableau de variation de f_n .
- 3) a- Démontrer qu'il existe un unique réel α_1 appartenant à l'intervalle $[0,2; 0,9]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.
 b- En déduire que $\ln(\alpha_1) = \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1}$ puis $f_n(\alpha_1) = (1-n)\left(\frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1}\right)$.
 c- Démontrer que, pour tout entier naturel $n > 1$, on a : $f_n(\alpha_1) < 0$.
 d- Pour tout entier naturel $n > 1$, démontrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1; 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
- 4) a- Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) .
 b- Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point B dont on déterminera les coordonnées.
- 5) a- En utilisant le sens de variation de la fonction f_0 , démontrer que, pour tout $x \in]0; 1]$ on a : $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.
 b- En déduire que pour tout entier naturel n différent de 0, on a : $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$.
 c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.
- 6) Soit h et g_n deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et définies par : $h(x) = x \ln x$ et $g_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
 - a- Calculer $h'(x)$.
 - b- Soit G_n une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction g_n .
 Calculer $G_n\left(\frac{3}{2}\right) - G_n(1)$.