

MATHEMATIQUES**SERIE C***Le sujet comporte 2 pages.**Chaque candidat utilisera 2 papiers millimétrés.***Exercice n° 1**

L'association des jeunes du quartier lycée dénommée « KOUADO », est une association au sein de laquelle les garçons sont plus nombreux que les filles. Les cotisations mensuelles sont de 900Fcfa pour les garçons et 700Fcfa pour les filles. Pour sa fête annuelle, le parrain de « KOUADO » désire offrir des tee-shirts aux garçons et des pagnes aux filles. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de filles et de garçons de cette association. Cependant, il sait que les cotisations mensuelles de tous les membres de « KOUADO » s'élève à 20000Fcfa.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre de garçons et le nombre de filles de cette association.

- 1- On considère l'équation **(E) : $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 1$**
 - a) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de (E). Démontrer que **$2x \equiv 1 \pmod{7}$**
 - b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation **$2x \equiv 1 \pmod{7}$**
 - c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est **$\{(4 + 7k; -5 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$**
- 2- Résoudre l'équation **(E') : $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 200$**
- 3- En déduire le nombre de garçons et de filles de cette association.

Exercice n°2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prend 2 cm comme unité graphique. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, notée (E).

$$(E) : z^3 + (-1+2i)z^2 - (1+2i)z - 3 + 4i = 0$$

- 1-a) On pose **$p(z) = z^3 + (-1+2i)z^2 - (1+2i)z - 3 + 4i$** . Justifier que i est un zéro de $P(z)$.
 - b) Déterminer les réels b et c tels **$P(z) = (z-i)(z^2 + bz + c)$**
 - c) Résoudre l'équation (E)
- 2- Soient A, B, et C les points d'affixes respectives **$i, -1-2i$ et $2-i$**
 - a) Placer les points A, B, et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.
 - b) Déterminer les réels β et λ pour que le point O soit le barycentre des points pondérés **$(A, 1); (B, \beta)$ et (C, λ)** .

Problème

Le plan est muni du repère (O, I, J) ; l'unité graphique est 4cm

PARTIE A

On considère la fonction numérique $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{1}{1+e^{-x}} \end{cases}$. On note (Γ) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J) .

1-a) Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

c) Dresser le tableau de variation de f

2- Justifier que (Γ) admet pour asymptotes la droite (OI) et la droite (γ) d'équation $y=1$.

3-a) Démontrer que le point $K(0; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (Γ)

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation : $x - 4y + 2 = 0$ est tangente à (Γ) en K

4-On se propose d'étudier la position de (Γ) par rapport à (Δ) .

Soit h et φ les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$ et $\varphi(x) = 4e^{-x} - (1+e^{-x})^2$

a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{\varphi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$

b) Etudier le sens de variation de φ et dresser le tableau de variation de φ (on ne demande pas de calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$).

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \leq 0$.

d) Démontrer que h est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

e) En vous aidant des questions précédentes démontrer que :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, h(x) \geq 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, h(x) \leq 0$$

f) En déduire la position relative de (Γ) et (Δ)

g) Tracer la courbe (Γ) et (Δ) dans le repère (O, I, J) .

PARTIE B

On définit la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$

(G) est la représentation graphique de g dans le repère (O, I, J) et (Δ') est la tangente à (G) en K

1- Démontrer que (Γ) et (G) sont symétriques par rapport à la droite (OJ)

2- En déduire les constructions de (Δ') et (G) dans le repère (O, I, J) .