

BACCALAURÉAT BLANC  
Session Mai 2016  
Série : D

Durée : 4 h  
Coefficient : 4

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3, 3/3.*

### EXERCICE-1 (4points)

Le tableau suivant donne X les dépenses militaires en milliards de francs et Y en milliers l'effectif de l'armée d'un pays.

|   |      |    |      |    |      |    |
|---|------|----|------|----|------|----|
| X | 36   | 42 | 48   | 54 | 60   | 66 |
| Y | 11,8 | 14 | 12,6 | 15 | 15,5 | 16 |

- Représenter le nuage de points associé à la série statistique double  $(x, y)$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (2 cm pour 5 milliards en abscisse et 2 cm pour 1000 soldats en ordonnée.)  
On prendra pour origine le point  $\Omega(35;11)$
- Déterminer les coordonnées du point moyen G.
- Justifier :
  - La variance de X est 105
  - La covariance de X et Y est 13.95
- Sachant que la variance de Y est égale à 2,32 . Déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.
  - Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.
- Soit  $(D)$  la droite d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrés.
  - Déterminer une équation de  $(D)$  .
  - Si le pays engageait 20000 soldats, donner le coût des dépenses militaires. On suppose que la droite de régression de X en Y a pour équation :  $x = 6,01y - 34,04$

### EXERCICE-2 (5points)

Soit  $U_1$  et  $U_2$  deux urnes :

$U_1$  contient 6 boules blanches et 4 boules noires.

$U_2$  contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

Il ya équiprobabilité dans le choix de l'une des deux urnes ; on extrait une boule que l'on remet dans l'urne.

- Si la boule était blanche on recommence le tirage dans la même urne
- Si la boule était noire on recommence le tirage dans l'autre urne

Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.

Soit  $P_n$  la probabilité pour que le  $n^{\text{ième}}$  tirage se fait dans l'urne  $U_1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

1. a) Traduire les données par un arbre de choix.  
b) Déterminer  $P_1$ .
2. Déterminer  $P_2$  en sachant que le second tirage s'est fait dans  $U_1$  soit parce que le premier tirage a été une boule blanche dans  $U_1$ , soit parce que le premier tirage a été d'une boule noire dans  $U_2$ .
3. Calcul de  $P_n$ .
  - a) Montrer que la probabilité de l'évènement << le  $(n-1)^{\text{ième}}$  tirage a été fait dans  $U_2$  >> est :  $1 - P_{n-1}$
  - b) Soit les évènements  
 $A_n$  << le  $(n-1)^{\text{ième}}$  tirage a été celui d'une boule blanche dans  $U_1$  >>  
 $B_n$  << le  $(n-1)^{\text{ième}}$  tirage a été celui d'une boule noire dans  $U_2$  >>  
 $A_n$  et  $B_n$  sont deux évènements incompatibles.
    - Montrer que  $P(A_n) = \frac{3}{5} P_{n-1}$  et  $P(B_n) = -\frac{1}{5} P_{n-1} + \frac{1}{5}$
    - En déduire que  $P_n = \frac{2}{5} P_{n-1} + \frac{1}{5}$

4. Soit la suite numérique  $(P_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2} \\ n \geq 2; P_n = \frac{2}{5} P_{n-1} + \frac{1}{5} \end{cases}$$

Soit la suite numérique  $(V_n)$  définie par :  $V_n = P_n - \frac{1}{3}$

- a) Démontrer que la suite  $(V_n)$  soit une suite géométrique.
- b) Exprimer la suite  $(V_n)$  puis  $(P_n)$  en fonction de  $n$ .
- c) Calculer la limite de la suite  $(V_n)$ . En déduire la convergence de la suite  $(P_n)$ .

### **PROBLÈME** ( 11 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ , unité graphique : 4 cm

#### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = -x + 1 + \ln x$

1. Justifier que  $g$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
3. a) Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$   
 b) Justifier que pour tout  $x \in ]0 ; 1[$ ,  $g'(x) > 0$  et que pour tout  $x \in ]1 ; +\infty[$ ,  $g'(x) < 0$   
 c) en déduire le sens de variation de  $g$ .

- a) Justifier  $g(1) = 0$
- b) dresser le tableau de variation de  $g$
- c) en déduire que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $g(x) \leq 0$

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Étudier la continuité de  $f$  en 0
- 2) a) Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0  
c) Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
b) Interpréter graphiquement les résultats.
- 4) a) Démontrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = -2g(x)$ .  
b) En déduire le signe de  $f'(x)$  et le sens de variation de  $f$ .
- 5) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 6) a) Justifier que  $(C_f)$  passe par le point  $A(1; 1)$   
b) Construire  $(C_f)$ .
- 7) a) Justifier que  $f$  est une bijection de  $[0; +\infty[$  vers un intervalle  $k$  à préciser.  
b) Calculer  $f(e)$  et  $(f^{-1})'(e^2 - 2e)$ .  
c) tracer  $(C_{f^{-1}})$  dans le même repère que  $(C_f)$

### Partie C

Soit un nombre réel tel que  $0 < t < 1$ . On pose  $K(t) = \int_t^1 x \ln x \, dx$

- 1) a) Déterminer  $K(t)$  en utilisant la technique d'intégration par partie.  
b) Justifier que la fonction  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x$$

est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

- 2) a) En déduire l'aire de la partie du plan délimitée par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x=t$  et  $x=1$ .  
b) Déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0} A(t)$ . Interpréter graphiquement ce résultat