MATHEMATIQUES

Série D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3. 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée

EXERCICE 1 *(4,5 points)*

I_ On considère les polynômes Q et P définis sur $\mathbb{C}$ par ; $Q(z) = z^2 + iz + 1 + 3i$

$$P(z) = z^3 + \left(1-\sqrt{2}\right)iz^2 + \left(1+\sqrt{2}+3i\right)z + (3-i)\sqrt{2}$$

1. a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-5-12i$

b) En déduire que les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Q(z) = 0$ sont $-1+i$ et $1-2i$.

2. a) Montrer que le nombre complexe $Z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

b) Vérifier que P(z) = Q(z). $(z - i\sqrt{2})$

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

II_ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe : $Z_A = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et on pose **U**$= (-1+i\sqrt{3})Z_A$.

1. a. Montrer que la forme exponentielle de **U** est $2e^{\frac{-7i\pi}{12}}$.

   b. A partir de la forme algébrique de **U**, déduire que $\begin{cases} Cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ Sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

   c. En déduire les solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\cos(x) - \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\sin(x) = 0.$$

EXERCICE 2 *4,5 points*

Les deux parties de l'exercice sont dépendantes. Les probabilités seront données à 0,001 près.

Une étude est menée par une association de lutte contre la violence routière.

Des observateurs, sur un boulevard d'une grande ville, se sont intéressés au comportement des conducteurs d'automobile au moment de franchir un feu tricolore.

Partie A ***Dans cette partie, on s'intéresse au respect de la signalisation par les automobilistes.***

Sur un cycle de deux minutes (120 secondes), le feu est à la couleur « rouge » pendant 42 secondes, « orange » pendant 6 secondes et « vert » pendant 72 secondes.

Par ailleurs, les observateurs notent que les comportements diffèrent selon la couleur du feu :

- lorsque le feu est rouge, 10% des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent ;
- lorsque le feu est orange, 86% des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent;
- lorsque le feu est vert, tous les conducteurs continuent de rouler.

On s'intéresse à un conducteur pris au hasard, et on observe son comportement selon la couleur du feu. On note les évènements suivants:

R : « le feu est au rouge » ; **O :** « le feu est à l'orange » ;
V : « le feu est au vert » ; **C :** « le conducteur continue de rouler ».

Pour tout évènement A, on note P(A) sa probabilité, $P_B(A)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Modéliser cette situation par un arbre pondéré.

2. Montrer que la probabilité que le conducteur continue de rouler au feu est 0,678.

3. Sachant qu'un conducteur continue de rouler au feu, quelle est la probabilité que le feu soit vert ?

Partie B

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n conducteurs d'automobile. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de conducteurs continuant de rouler au feu.

1) on suppose que $n = 5$;

a) Calculer la probabilité pour que exactement 2 des conducteurs choisis continuent de rouler au feu.

b) Déterminer la probabilité de ne pas avoir de conducteurs continuant de rouler au feu.

2) on considère les n conducteurs d'automobile;

a) Quelle est la probabilité P_n qu'au moins un des conducteurs choisis continue de rouler ?

b) Démontrer que le nombre minimal de conducteurs d'automobile à choisir pour que $P_n \geq 0{,}999$ est $n_0 = 7$

Problème *(11 points)*

Partie A

On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = -x + e^x - 1$.

1.a) Etudier le sens de variations de g puis dresser son tableau de variation.
(on ne demande pas de calculer les limites)

b) Montrer que $g(x) \geq 0$ sur IR.

2. Soit la fonction h définie sur IR par $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1$.

a) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Montrer que le signe de h', dérivée de h, est celui de $1 - x$.

c) Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation.

d) Démontrer que la courbe représentative de h notée (C_h) coupe l'axe des abscisses exactement en deux points d'abscisses respectives α et β tels que $\alpha < \beta$.

e) Justifier que $h(x) > 0$ si $x \in]\alpha\,;\,\beta[$ et $h(x) < 0$ si $x \in]-\infty\,;\alpha[\cup]\beta\,;+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.

On appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O,I,J) d'unité 5cm. On admettra que pour tout réel x on a : $x - e^x < 0$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2 a. On admet que $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$; démontrer que pour tout nombre réel x ; $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.

b En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

c. Montrer $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ et en déduire que $1{,}17 < f(\beta) < 1{,}20$ sachant que $1{,}84 < \beta < 1{,}85$.

3 a. Déterminer une équation de la tangente (**T**) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que pout nombre réel x ; $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

c. En déduire la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (**T**).

4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (**T**).
(*on prendra* $\boldsymbol{\alpha = -1{,}14}$; $\boldsymbol{f(\alpha) = -0{,}47}$ *et* $f(\beta)$=1,2

16_BACblanc_MATH_TD_lmMan

5. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0.