BACCALAUREAT BLANC REGIONAL Coefficient : 4

SESSION AVRIL 2016 Durée : 4 h

MATHEMATIQUES

Série D

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 *(4 points)*

Soit le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1. a) Calculer $P(2i)$.
   b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité : 2 cm.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = \sqrt{3} + i$ *et* $z_C = \sqrt{3} - i$.

   a) Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J).
   b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ puis donner le résultat sous forme exponentielle.
   c) En déduire la nature du triangle ABC.

4. a) Déterminer l'affixe du point D, le symétrique du point B par rapport à O.
   b) Justifier que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 *(5 points)*

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner.
Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'événement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'événement « le joueur gagne ».
Dans l'exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. a) Justifier que la probabilité de l'événement N est : $\frac{2}{5}$
   b) Démontrer que la probabilité de l'événement G est : $\frac{3}{10}$
   (On pourra s'aider d'un arbre pondéré).
   c) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour participer à ce jeu, une mise de départ de m francs CFA est demandée, où m est un nombre réel strictement positif.

- Si le joueur gagne, il reçoit 2600 francs CFA.
- S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
- S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a) Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{-m\ ;\ 0\ ;\ 2600-m\}$

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Démontrer que l'espérance mathématique de X est : $E(X)=\frac{-4}{5}m+780$.

d) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3) Un joueur participe n fois à ce jeu ($n \in \mathbb{N}^*$) sachant qu'après chaque partie, les boules sont remises dans le sac.

a) Démontrer que la probabilité P_n de gagner au moins une fois est : $P_n = 1-(\frac{7}{10})^n$

b) Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle $P_n \geq 0{,}999$.

PROBLEME *(11 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) *(unité: 2 cm)*.

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x)=x+1-e^x$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
2. Calculer $g'(x)$ pour x élément de $\mathbb{R}$.
3. a) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.

   b) Justifier que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g(x) \leq 0$

PARTIE B

On considère la fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3(x^2+x)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère (0, I, J).

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

   c. Interpréter graphiquement les résultats de 1.a. et 1.b.
2. a. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=3(-x^2+x+1)e^{-x}$.

   b. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation. On ne cherchera pas à calculer $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

   b. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)-3x=3xe^{-x}g(x)$.

   c. Déduire de la partie A., les positions relatives de (T) et de (C).
4. Dans le repère (O, I, J) ci-dessus, tracer avec précision la tangente (T) et la courbe (C).

   On donne : $\sqrt{5}\approx 2{,}2$; $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\approx -1{,}3$ et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\approx 2{,}5$.

PARTIE C

1. Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que : $F(1)-F(0)=9-\frac{21}{e}$