Ville: **Man**

Année Scolaire: **2015-2016**

Durée :**4h**

# DEVOIR DE MATHEMATIQUES

**Série D**

***Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2***

***Toute calculatrice scientifique est autorisée***

## EXERCICE 1 *(3 points)*

On veut déterminer une primitive de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{2\ln x}{(x+1)^3}$

1) Soit **u** la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\mathbf{u}(x)=\frac{1}{x(x+1)^2}$
   a) Montrer que $\forall x \in ]0;+\infty[$ , $\mathbf{u}(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$
   b) En déduire une primitive **U** de **u** sur $]0;+\infty[$
2) On considère la fonction V définie sur $]0;+\infty[$ par $V(x)=\frac{\ln x}{(x+1)^2}$
   a) Montrer que $\forall x \in ]0;+\infty[$ , la dérivée de V est ; $V'(x) = u(x) - g(x)$
   b) En déduire des questions précédentes la primitive G de g qui s'annule en 1

## EXERCICE 2 *( 5,75 points)*

Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré aux services de la douane. Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douanes.
A chacun de ces barrages, le contrôle obligatoire consiste à examiner 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).

**1.** Le camionneur arrive à un barrage donné.
***On donnera l'arrondi d'ordre un de chacun des résultats obtenus***.
   a) Calculer la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré
   b) Démontrer que la probabilité pour que l'un au moins des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré est égale à 0,6.

**2.** Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire 10 000 franc (dix mille francs) à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec tout son chargement. Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi.

**A-**On suppose que le camionneur paye la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert. **On donnera l'arrondi d'ordre trois de chacun des résultats obtenus**
On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Démontrer que la somme moyenne payée par le camionneur est 18000F

**B-** on suppose que le camionneur n'a pas assez d'argent pour payer une éventuelle taxe, calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.

*Tournez la page SVP*

**3.** On admet le tableau ci-dessous traduisant une loi de probabilité, déterminer puis construire la fonction de répartition F.(***on prendra 2cm pour 10000 sur (OI) et 10cm pour 1 sur (OJ)*** ).

| $x_i$ | 0 | 10000 | 20000 | 30000 |
|---|---|---|---|---|
| $P(x=x_i)$ | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |

## **Problème** *( 11,25 Points)*

On considère la fonction $f$ de représentation graphique $(\varphi)$ définie par : $f(x) = \dfrac{\ln^3 x - \ln x + 1}{\ln^2 x}$ dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm ou e est le nombre tel que ln(e)= 1.

### *Partie A*

On donne la fonction $g$ définie et dérivable sur $]\,0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln^3 x + \ln x - 2$

**1.** Calculer la limite de $g$ en 0 et en $+\infty$.

**2.** a) Justifier que le dérivée de $g$ sur $]\,0;+\infty[$ est : $g'(x) = \dfrac{1+3\ln^2 x}{x}$

b) Etudier les variations de $g$ et dresser son tableau de variation.

**3.** a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]\,0;+\infty[$ une unique solution $\beta$.

b) Montrer que $2<\beta<3$ puis donner un encadrement de $\beta$ d'ordre un.

c) Calculer $g(\boldsymbol{e})$ et exprimer $\boldsymbol{e}$ en fonction de $\beta$

**4.** Prouver que : $\forall x \in ]\,0;\boldsymbol{e}[\,;\ g(x) < 0$ et $\forall x \in ]\boldsymbol{e};+\infty[\ \ g(x) > 0$ .

### *Partie B*

**1.** Montrer que l'ensemble de définition de $f$ est : $D_f = ]0;1[\cup]\,1;+\infty[$.

**2.** a) Calculer les limite de $f$ en 0 et en 1 puis interpréter graphiquement les résultats

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ interpréter graphiquement les résultats.

**3.** a) Justifier que la courbe $(\Gamma)$ définie par : $y = \ln x$ est une asymptote oblique à $(\boldsymbol{\varphi})$.

b) Etudier la position relative de $(\boldsymbol{\varphi})$ par rapport à $(\Gamma)$.

**4.** a) Démontrer que pour tout $x$ élément de $D_f$ on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(\ln x)^3}$.

b) A l'aide des résultats de la partie A, donner le sens de variation de $f$.

c) Dresser le tableau de variation de $f$.

### **Partie C**

**1.** Calculer l'image de 9,5 par $f$ (***on donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat***).

**2.** Soit $h$ la restriction de $f$ sur $]\,e;+\infty[$ .

**a)** Justifier que $h$ réalise une bijection de $]\,e;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

**b)** On désigne par $h^{-1}$ la bijection réciproque de $h$.
Donner le sens de variation de $h^{-1}$ et dresser son tableau de variation.

**c)** Montrer que $h^{-1}$ est dérivable en 2 puis calculer $(h^{-1})'(2)$.( résultat à l'ordre un)

**3.** Construire $(\boldsymbol{\varphi})$, $(\Gamma)$ la courbe de ln et éventuellement les asymptotes verticales dans la fenêtre ]0 ;14]

*Bonne chance*