

DEVOIR RÉGIONAL DE MATHÉMATIQUES
NIVEAU TERMINALE C

24 janvier 2023

14h à 18h

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

L'utilisation de la calculatrice scientifique est autorisée.

Exercice 1 (2 points)

Écris sur ta feuille de copie le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si elle est fausse.

N°	Propositions
1.	f est une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a; b[$. Si f est strictement croissante et majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.
2.	f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K , a un élément de K et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère. Si f'' s'annule en a , le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C) .
3.	Soit (D) une droite, F un point n'appartenant pas à (D) et H le projeté orthogonale de F sur (D) . L'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = \ln(2e)$ est une hyperbole.
4.	n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et f est une fonction définie n fois dérivable sur un intervalle ouvert $]a; b[$. $f^{(n)}$ est une primitive sur $]a; b[$ de $f^{(n-1)}$.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'obtenir une affirmation juste.

Écris le numéro de l'énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	ÉNONCÉS INCOMPLETS	RÉPONSES	
1.	Si ABC un triangle équilatéral et O le milieu du segment $[BC]$, alors pour tout point M du plan, le nombre réel $2MA^2 - MB^2 - MC^2$ est égal à ...	A	$-OB^2 - OC^2$.
		B	$2OA^2 - OB^2 - OC^2 - 4\vec{OA} \cdot \vec{OM}$.
		C	$2OA^2 - OB^2 - OC^2 - 4\vec{MO} \cdot \vec{OA}$.
		D	$-4\vec{OA} \cdot \vec{OM}$.
2.	Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , la parabole d'équation réduite $y^2 = -4x$ a pour foyer le point F de coordonnées...	A	$(2; 0)$.
		B	$(0; 1)$.
		C	$(-1; 0)$.
		D	$(0; -2)$.
3.	Le plus petit entier naturel qui admet 8 diviseurs entiers naturels est ...	A	2^7 .
		B	30
		C	24.
		D	16.
4.	La fonction $x \mapsto \sin 5x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction ...	A	$x \mapsto 5\cos 5x$.
		B	$x \mapsto -5\cos 5x$.
		C	$x \mapsto -\frac{1}{5}\cos 5x$.
		D	$x \mapsto \frac{1}{5}\cos 5x$.

Exercice 3 (3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives

$$4x - y + z - 7 = 0 \text{ et } x - y - 2z - 4 = 0,$$

et la droite (D) de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$$

1) 1-a) Justifie que les plans (P) et (Q) sont sécants.

1-b) Démontre que l'intersection (D') des plans (P) et (Q) est une droite dont une

$$\text{représentation paramétrique est } \begin{cases} x = 1 - u \\ y = -3 - 3u, u \in \mathbb{R}. \\ z = u \end{cases}$$

2) Justifie que la droite (D) est parallèle au plan (P).

3) On admet que la droite (D) est parallèle au plan (Q).

Déduis, de tout ce qui précède, la position relative des droites (D) et (D').

Exercice 4 (3,5 points)

n est un entier supérieur ou égal à 4.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, les nombres A, B et C , écrits en base n :

$$A = \overline{20}^n; \quad B = \overline{32}^n; \quad C = \overline{1300}^n.$$

1) 1-a) Justifie que $A \times B = C$ si et seulement si n est solution dans $\mathbb{N}$ de l'équation (E) :

$$n^3 - 3n^2 - 4n = 0.$$

1-b) Détermine la valeur de n pour laquelle $A \times B = C$.

2) On suppose par la suite que $n = 4$ et on considère l'entier naturel D qui s'écrit $5xy$ dans le système décimal.

2-a). Justifie que D est divisible par 4 si et seulement si $2x + y \equiv 0[4]$.

2-b) Détermine pour quelles valeurs de x et y D est divisible par 4.

Exercice 5 (4,5 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^{2n}(1 - \ln x)^2, \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1) On admet que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \ln x = 0$.

1-a) Justifie que f_n est continue en 0.

1-b) Justifie que la courbe (C_n) admet en son point d'abscisse 0, une tangente parallèle à l'axe (OI).

1-c) On admet que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$.

Interprète graphiquement ces résultats.

2) 2-a) On admet que f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'_n(x) = 2x^{2n-1}(1 - \ln x)(n - 1 - n \ln x)$.

2-b) Détermine les variations de f_n sur $]0; +\infty[$.

2-c) Vérifie que : $f_n\left(e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \frac{1}{n^2}e^{2n-2}$.

2-d) Dresse le tableau de variation de f_n .

3) On admet que : $\forall x \in]0; +\infty[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n}(1 - \ln x)^2(x + 1)(x - 1)$.

3-a) Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes.

3-b) Déduis-en la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .

Exercice 6 (5 points)

Un centre sportif communal a été construit sans la piscine initialement prévue. Deux plans de piscine P_1 et P_2 avaient été réalisés dont l'un devrait être choisi. Suite à de nombreux aménagements sur le centre, l'espace réservée à la piscine s'est réduit à un terrain ayant la forme d'un rectangle ABCD tel que $AB=10$ m et $AD=8$ m.

Afin d'encourager l'engouement de nombreux jeunes de sa commune aux compétitions de natation, l'actuel conseil municipal a arrêté à sa dernière session de construire la piscine.

Une étude liée aux données de l'espace restant a montré que :

- **Selon le Plan P_1** : le bord de la piscine est l'ensemble (E) des points M du plan du sol tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AD$.
- **Selon le Plan P_2** : Dans le plan du sol muni du repère orthonormé direct $(O, \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{AD}\overrightarrow{AD})$ où O est le centre du rectangle ABCD, le bord de la piscine est l'ensemble (F) des points M (x,y) du plan vérifiant l'équation : $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Certain membre du conseil estime que c'est le plan P_1 qui est réalisable sur l'espace restant, d'autres pensent plutôt au plan P_2 .

Soucieux d'éviter des dépenses supplémentaires liées aux honoraires d'un technicien pour trancher, un membre du conseil municipal vient te poser le problème.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, rédige la réponse que tu lui donneras.