

DEVOIR RÉGIONAL DE MATHÉMATIQUES

NIVEAU TERMINALE D

24 janvier 2023

14h à 18h

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

L'utilisation de la calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si elle est fausse.

- 1) Une fonction continue sur un intervalle admet au moins une primitive sur cet intervalle.
- 2) a étant un nombre réel strictement positif, et n un nombre entier naturel, on a :
 $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a^{6n}}}$ est égale à $\sqrt{a}$.
- 3) Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors la variance $V(X)$ est égale $np(1-p)$.
- 4) Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a; b]$, alors l'image de $[a; b]$ par f est $[f(a); f(b)]$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci - dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'obtenir affirmation juste.

Écris le numéro de l'énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncé incomplet	A	B	C
1	L'ensemble de validité de l'équation dans $\mathbb{R}$: $\ln(5-x^2) = \ln 4x$ est ...	$]0; 5[$	$] -5; 0[$	$]0; \sqrt{5}[$
2	Pour tout nombre réel strictement positif a , $\ln(\sqrt{a})$ est égal à ...	$\sqrt{\ln a}$	$\frac{1}{2} \ln a$	$-\ln(a)$
3	Si A et B sont deux événements indépendants tels que $p(A \cap B) = 0,21$ et $p(A) = 0,3$, alors on a ...	$p(B) = 1$	$p(B) = 0,7$	$p(B) = 0,4$
4	Soit g une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$, et g^{-1} sa bijection réciproque. Si $g(-2) = 3$ et $g'(-2) = \frac{1}{4}$, alors $(g^{-1})'(3)$ est égale à ...	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	4

EXERCICE 3 (2,5 points)

Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = \frac{2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$.

- 1) Justifie que la fonction $x \mapsto -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ est la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}.$$

- 2) Détermine les nombres réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

- 3-) Déduis-en la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

EXERCICE 4 (4,5 points)

On considère la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{2x-1-x \ln x}{x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. Unité graphique 2 cm.

1) Calcule la limite de f en 0. Interprète graphiquement le résultat.

2) 2-a) Justifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

2-b) Interprète graphiquement les résultats précédents.

3) 3-a) Démontre que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1-x}{x^2}$.

3-b) Détermine les variations de f et dresse son tableau de variations.

4) 4-a) Démontre que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en deux points A et B d'abscisses respectives α et β tels que $\alpha < \beta$.

4-b-) Justifie que $6,3 < \beta < 6,4$.

5) Trace (C_f) dans le repère ; on prendra $\alpha = 0,3$ et $\beta = 6,35$.

6) Soit g la restriction de f à $]0;1[$.

6-a) Démontre que g est une bijection de $]0;1[$ sur un intervalle K à préciser.

6-b) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g .

Dresse le tableau de variation de g et celui de g^{-1} .

EXERCICE 5 (4 points)

Une enquête réalisée dans un lycée sur les congés anticipés a donné les résultats suivants :

- 80 % des élèves sont contre les congés anticipés ;
- Parmi les élèves favorables aux congés anticipés, 10% ont eu la moyenne au premier trimestre ;
- Parmi les élèves qui sont contre les congés anticipés, 90% ont eu la moyenne au premier trimestre.

On choisit au hasard un élève de ce lycée et on considère les évènements suivants :

F : « L'élève est favorable aux congés anticipés. »

M : « L'élève a eu la moyenne au premier trimestre. »

Partie A

Dans cette partie, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1) Dresse un arbre de probabilité traduisant cette situation.

2) Justifie que la probabilité que l'élève soit contre les congés anticipés et ait eu la moyenne au premier trimestre est égale à $\frac{18}{25}$.

3) Justifie que la probabilité que l'élève ait eu la moyenne au premier trimestre est égale à $\frac{37}{50}$.

Partie B

Dans cette partie, on donnera les résultats sous forme décimale arrondie d'ordre 3.

On choisit au hasard 8 élèves de ce lycée et on considère la variable aléatoire X prenant pour valeur, le nombre d'élèves ayant la moyenne au premier trimestre. On admet que la population de ce lycée est suffisamment grande pour que le choix de 8 élèves soit assimilable à une succession d'expériences indépendantes.

- 1) Calcule la probabilité qu'il y ait exactement 5 élèves ayant eu la moyenne au premier trimestre.
- 2) Calcule l'espérance mathématiques de X . Interprète le résultat.

EXERCICE 6 (5 points)

Une entreprise de la place met en vente pour le mois de février 2023 (qui compte 28 jours) une partie de ses actions.

Un agent économique de la région, souhaite acquérir ces actions.

Après investigation, celui-ci est informé que la valeur totale de ces actions qui varie selon le jour, est modélisée en millions de francs CFA par la relation :

$V(x) = (x+1)^2 - 648\ln(x+1) + 1550$ où x désigne l'ordre des jours du mois de février.

Par ailleurs, le gain tiré des actions est d'autant plus grand que la valeur totale des actions est élevée.

L'agent économique souhaite connaître le jour du mois de février le mieux indiqué pour obtenir un gain maximal de l'acquisition de ces actions. Ne sachant comment s'y prendre, il te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, rédige la réponse que tu lui donneras.