

(Les résultats sont donnés à titre indicatif . On appréciera la résolution de l'élève pour chaque question sauf pour les exercices 1 et 2).

**EXERCICE 1 (2 POINTS)**

1.Faux 0,5point 2.Faux 0,5point 3.Vrai 0,5point 4.Faux0,5 point

**EXERCICE 2 (2 POINTS)**

1.B 0,5point 2.C 0,5point 3.C 0,5point 4. A. 0,5point

**EXERCICE 3 (3 POINTS)**

1.

1.a) Justifions de la position des plans (P) et (Q) .

Les vecteurs  $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{n'} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs normaux respectifs de (P) et (Q) .

$\vec{n}$  et  $\vec{n'}$  ne sont pas colinéaires donc (P) et (Q) sont sécants. ....0,75

1.b) Montrons que l'intersection (D') des plans (P) et (Q) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 - u \\ y = -3 - 3u ; u \in \mathbb{R}. \\ z = u \end{cases}$$

De l'équation de (Q) on tire que  $x = y + 2z + 4$ . (1)

(1) introduit dans l'équation de (P) donne l'équation :

$$4(y + 2z + 4) - y + z - 7 = 0 \text{ soit } y = -3 - 3z.$$

On déduit aussi que  $x = 1 - z$ .

$$(D') \text{ a pour représentation paramétrique } \begin{cases} x = 1 - u \\ y = -3 - 3u ; u \in \mathbb{R} \\ z = u \end{cases}$$

1

2) Justifions que la droite (D) est parallèle au plan (P).

Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de (D).

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  donc la droite (D) est parallèle au plan (P) .....0,75

3) Dédudisons, de tout ce qui précède ,la position relative des droites (D) et (D').

Théorème du toit :

Lorsqu’une droite de l’espace est parallèle à deux plans sécants, elle est parallèle à leur droite d’intersection.  
Comme (D) est parallèle à ( P ) et parallèle à ( D ) alors ( D ) est parallèle à ( D' ).....0,5

### EXERCICE 4 ( 3,5POINTS)

1

1.a) Justifions que  $AxB = C$  si et seulement si  $n$  est solution dans  $\mathbb{N}$  de l’équation (E): $n^3 - 3n^2 - 4n = 0$ .

$AxB = C$  équivaut à  $2 n(3 n + 2) = n^3 + 3n^2$  , ce qui équivaut à  $n^3 - 3n^2 - 4n = 0$ .....1

1.b) Déterminons la valeur de  $n$ .

L’équation  $n^3 - 3n^2 - 4n = 0$  équivaut à  $n(n + 1)(n - 4) = 0$   
Dans  $\mathbb{N} \setminus \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$  cette équation a pour solution  $n = 4$ .....0,5

2.

2. a) Justifions que D est divisible par 4 si et seulement si  $2x + y \equiv 0[4]$ .

|                                                                                                                                                                           |   |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------|
| $D=5 \times 10^2 + 10x + y .$<br>Or $10 \equiv 2[4]$ et $10^2 \equiv 0[4]$ donc $D \equiv 2x + y[4]$ .<br>D est divisible par 4 si et seulement si $2x + y \equiv 0[4]$ . | } | .....0,5 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------|

2. b) Déterminons les conditions que vérifient  $x$  et  $y$  pour que D soit divisible par 4.

Les restes de la division de  $x$  par 4 sont 0;1;2,et 3.

Si  $x \equiv 0[4]$  alors  $2x \equiv 0[4]$  .Donc  $y \equiv 0[4]$ .

Si  $x \equiv 1[4]$  alors  $2x \equiv 2[4]$  .Donc  $y \equiv 2[4]$ .

Si  $x \equiv 2[4]$  alors  $2x \equiv 0[4]$  .Donc  $y \equiv 0[4]$ .

Si  $x \equiv 3[4]$  alors  $2x \equiv 2[4]$  .Donc  $y \equiv 2[4]$ .

Conclusion .....1,5

D est divisible par 4 lorsque :

a)  $x \equiv 0[4]$  et  $y \equiv 0[4]$  ou

b)  $x \equiv 1[4]$  et  $y \equiv 2[4]$  ou

c)  $x \equiv 2[4]$  et  $y \equiv 0[4]$  ou

d)-  $x \equiv 3[4]$  et  $y \equiv 2[4]$ .

## EXERCICE 5 (4,5 POINTS)

1. On admet que pour tout nombre réel  $\alpha > 0$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ .

a) Justifions que  $f_n$  est continue en 0.

Justification correcte.....0,5

b) Justifions que la courbe  $(C_n)$  admet en son point d'abscisse 0, une tangente horizontale.

Justification correcte. ....0,25

c) On admet que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$ .

Interprétation graphiquement ces résultats.

Interprétation correcte .....0,25

2. a) On admet que  $f_n$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Justifions que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'_n(x) = 2x^{2n-1}(1 - \ln x)(n - 1 - n \ln x)$ .

Justification correcte..... 0,5

b) Déterminons les variations de  $f_n$  sur  $]0; +\infty[$ .

Etude du signe de la dérivée

Tableau de signe

| $x$               | 0 | $e^{\frac{n-1}{n}}$ | $e$ | $+\infty$ |
|-------------------|---|---------------------|-----|-----------|
| $(1 - \ln x)$     | + | +                   | 0   | -         |
| $n - 1 - n \ln x$ | + | 0                   | -   | -         |
| $f'_n(x)$         | 0 | +                   | 0   | +         |

$f_n$  est strictement croissante sur  $[0 ; e^{\frac{n-1}{n}}]$  et sur  $[e ; +\infty[$ .

$f_n$  est strictement décroissante sur  $[e^{\frac{n-1}{n}} ; e]$ .

.....1

c) Vérifions que :  $f_n\left(e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \frac{1}{n^2} e^{2n-2}$ .

Vérification correcte .....0,5

d) Tableau de variation de  $f_n$ .

| $x$       | 0 | $e^{\frac{n-1}{n}}$               | $e$          | $+\infty$          |
|-----------|---|-----------------------------------|--------------|--------------------|
| $f'_n(x)$ | 0 | +                                 | 0            | -                  |
| $f_n(x)$  | 0 | $\nearrow \frac{1}{n^2} e^{2n-2}$ | $\searrow 0$ | $\nearrow +\infty$ |

.....0,5

3. On admet que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n}(1 - \ln x)^2(x + 1)(x - 1)$ .

a) Démontrons que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par trois points fixes.

L'équation ;  $x \in ]0; +\infty[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$  a pour solutions les nombres réels  $e$  et  $1$ .  
 Par hypothèse, pour tout entier naturel  $n \neq 0$ ,  $f_n(0) = 0$  donc  $f_{n+1}(0) - f_n(0) = 0$   
 Par suite, les courbes  $(C_n)$  passent par les points de coordonnées  $(0; 0)$ ,  $(e; 0)$  et  $(1; 1)$ .

0,5

b) Dédisons-en la position relative des courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$ .

Signe de  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$

$(C_{n+1})$  est au -dessus de  $(C_n)$  sur  $[1; e]$ .

$(C_{n+1})$  est au dessous de  $(C_n)$  sur  $[0; 1] \cup [e; +\infty[$ .

.....0,5

**Exercice 6 (5 points)**

Pour la situation complexe, on fera apparaître sur la copie le détail des notes attribuées.

| <b>CM1 : Pertinence</b><br>Identification correcte du modèle correspondant au problème posé (interprétation correcte de la situation complexe ; pertinence des choix opérés par les élèves sur les données de la situation) | <b>CM2 : Utilisation correcte des outils</b> (concerne les étapes de la démarche)<br>- Choix des outils appropriés<br>- Application correcte des propriétés, règles et définitions                                                                                                               | <b>CM3 : Cohérence de la réponse</b><br>- Cohérence entre les étapes de la démarche<br>- Cohérence dans la démonstration                                                      | <b>CP : Critère de perfectionnement</b>                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| La résolution du problème posé se ramène à :<br>- la détermination d'une ligne de niveau,<br>- la détermination et la caractérisation d'une conique,<br>- la construction des deux ensembles.                               | -Identification du barycentre lié à l'expression vectorielle.<br>- Réduction de l'expression vectorielle.<br>-Détermination de la ligne de niveau<br>-Détermination de la nature et les éléments caractéristiques de la conique.<br>-Constructions des deux ensembles<br>- L'avis ( la réponse ) | - Le résultat produit est conforme au résultat attendu<br><br>- Le résultat produit est en adéquation avec la démarche<br><br>- La qualité des enchainements de la démarche . | - Concision<br>- Originalité<br>- Bonne présentation                |
| <b>1 point :</b><br><br>1 indic sur 3 → 0,75 pt<br>2 indic sur 3 → 1 pt                                                                                                                                                     | <b>2,5 points</b><br><br>1 indic sur 6 → 0,5 pt<br>2 indic sur 6 → 1 pt<br>3 indic sur 6 → 2 pt<br>4 indic sur 6 → 2,5 pt                                                                                                                                                                        | <b>point : 1</b><br><br>1 indic sur 3 → 0,5 pt<br>2 indic sur 3 → 1pt                                                                                                         | <b>0,5</b><br><br>1 indic sur 3 → 0,25 pt<br>2 indic sur 3 → 0,5 pt |

