



MATHEMATIQUES

Série C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Toute calculatrice scientifique est autorisée.

Le candidat utilisera deux (02) feuilles de papier millimétré.

Exercice 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de l'affirmation suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou **FAUX** si celle-ci est fausse.

N°	Affirmations
1	Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace, une représentation paramétrique de la droite passant par les points $A(1; 0; 1)$ et $B(0; 1; 1)$ est donnée par : $x = 1 - t$; $y = t$ et $z = 1$
2	Si a un nombre réel tel que $0 < a < 1$, alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3	La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$ qui s'annule en 0.
4	L'ensemble solution de l'équation $x \in \mathbb{R}, e^x = 1 - \sqrt{2}$ est l'ensemble vide.

Exercice 2 (2 points)

Pour chaque énoncé du tableau, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est juste.

Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Enoncés	Réponses
1	Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a; b]$ et en plus $f(a) \times f(b) < 0$ alors...	A f ne s'annule pas entre a et b
		B f s'annule une seule fois entre a et b
		C f s'annule au moins une fois entre a et b
2	Un argument du nombre complexe $-2e^{i\frac{\pi}{5}}$ est	A $-\frac{\pi}{5}$
		B $\frac{\pi}{5}$
		C $\frac{6\pi}{5}$
3	f est une fonction telle que : $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{5}{x} \leq -3 + f(x) \leq \frac{5x+3}{x} - 5$. La limite de f en $+\infty$ est égale à	A 0
		B -3
		C 3
4	Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on considère le plan (P) d'équation cartésienne : $2x + y - z + 7 = 0$ Un plan perpendiculaire à (P) a pour vecteur normal	A $\vec{v}\left(\frac{-1}{2}; 2; 1\right)$
		B $\vec{u}(2; 1; -1)$
		C $\vec{w}\left(\frac{-1}{2}; 2; -1\right)$

Exercice 3 (3 points)

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 4$ et $AC = 5$. On désigne par I le milieu du segment $[BC]$

1. On admet que pour tout point M du plan $MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

Justifie que $AI = \sqrt{33}$.

2. Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan vérifiant $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 58$.

a) Vérifie que I appartient à (Δ) .

b) Détermine et construis (Δ) .

3. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, -1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

a) Démontre que le quadrilatère $ABGC$ est un parallélogramme.

b) Détermine et construis (Γ) l'ensemble des points M du plan vérifiant $MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25$.

Exercice 4 (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2cm, on considère l'application f du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = z^2 - (3-i)z + 4 - 3i$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où $x; y; x'; y'$ sont des nombres réels.

1. Détermine les points M d'affixe z tels que $M' = O$.

2. Exprime x' et y' en fonction de x et y .

3. a) Démontre que lorsque M' décrit l'axe des ordonnées, le point M décrit la courbe (C) d'équation : $x^2 - y^2 - 3x - y + 4 = 0$.

b) Justifie que : $M(x; y) \in (C)$ si et seulement si $\frac{-(x - \frac{3}{2})^2}{2} + \frac{(y + \frac{1}{2})^2}{2} = 1$.

c) Détermine la nature de (C) et précise son centre I .

d) Détermine l'excentricité, un sommet, un foyer et une asymptote de (C) dans le repère $(I; \vec{u}; \vec{v})$.

4. Trace la courbe (C) .

Exercice 5 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; I; J)$ d'unité 2cm.

1. a) Démontre que f est continue en 0.

b) Etudie la dérivabilité de f en 0.

2. a) Démontre que pour tout t élément de $]0; 1[$, $f\left(\frac{1}{t} - 1\right) = \frac{(1-t)^2}{t} \times \frac{\ln(1-t)}{t}$.

b) On admet que : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1$. A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{1+x}$, démontre que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. On admet qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1-t) = -t + \frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. (1)
- a) Démontre que pour tout nombre réel strictement positif x : $f(x) + x - \frac{1}{2} = \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \ln(1-t) + \frac{1}{t} - \frac{3}{2}$ avec $t = \frac{1}{1+x}$.
- b) En utilisant la relation (1), démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
4. On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$.
- a) Etudie le sens de variation de g .
- b) On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$.
5. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
- a) Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = xg(x)$.
- b) Déduis-en le sens de variation de f .
- c) Dresse le tableau des variations de f .
6. Construis la courbe (C) .

Exercice 6 (5 points)

Pour faire fructifier ses affaires, Konaté, un jeune de ta commune décide d'ouvrir le coffre-fort contenant des objets précieux que lui a légués son défunt père anciennement professeur de Mathématiques. Après avoir ouvert le coffret contenant le coffre-fort, il découvre une enveloppe contenant une feuille sur laquelle sont données des indications sur le code de déverrouillage du coffre-fort.

Sur la feuille, on pouvait lire ceci :

- Le code de déverrouillage est un nombre entier naturel de quatre chiffres, multiple de 99.
- Le chiffre des milliers est le chiffre des unités du nombre 3^{2023}
- Le chiffre des centaines est la plus petite solution dans $\mathbb{N}$ de l'équation $(E) : 4x + 5 \equiv 0[7]$

Ne sachant comment exploiter ces informations, il sollicite son neveu Daouda en classe de Terminale C dans un Lycée de ta commune qui à son tour te soumet le problème.

A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances de Terminale C, donne une réponse à Konaté.