BACCALAURÉAT BLANC RÉGIONAL **Coefficient : 4**

SESSION : FEVRIER 2023 **Durée : 4 h**

MATHEMATIQUES

Série D
Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.
Le candidat utilisera deux feuilles de papier millimétré.

Exercice 1 **(2 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, relève le numéro suivi de V si elle est vraie ou F si elle est fausse. (Aucune justification n'est demandée)

N°	AFFIRMATIONS
1	Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a;+\infty[$ ou (a $\in$ $\mathbb{R}$) alors f($[a;+\infty[$)= $\left[f(a);\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$
2	S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle $]a;+\infty[$ tel que : $\forall\ x\ \in\ ]a;+\infty[$, $\lvert f(x)+l\rvert \leq g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-l$.
3	Si f est une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I telle que $\forall\ x \epsilon\ I, f'(x)\neq 0$, alors sa bijection réciproque f^{-1} a pour dérivée : $\forall\ x\ \epsilon\ f(I)\ ;\ (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
4	La fonction $x\mapsto 2x-\sqrt{2x+4}$ est dérivable en -2.

Exercice 2 **(2 points)**

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse juste. (Aucune justification n'est demandée)

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	Soit h une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que h(1)=3 et $h'(1)=\frac{1}{2}$, h^{-1} est la bijection réciproque de h. $(h^{-1})'(3)$ est égal à	$\frac{1}{2}$	2	3
2	La fonction $x\mapsto \sin(2x+\frac{\pi}{4})$ admet pour dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction	$x\mapsto 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$	$x\mapsto -2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$	$x\mapsto \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$
3	la limite en $+\infty$ de $\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2+2x-5}$ est :	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
4	Si $\lim_{\substack{x\to a\\ >}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ $a$lors la courbe représentative de la fonction f admet	Une demi-tangente verticale au point d'abscisse a.	Une asymptote verticale d'équation $x=a$	Une demi-tangente horizontale au point d'abscisse a.

Exercice 3 **(3 points)**

On veut déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par :
$f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
Soit g la fonction définie sur $]-\infty;1[$, par $g(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^2}$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. On admet que $\forall\, x \in\ ]-\infty;1[,\ g(x) = \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$.
   Détermine une primitive G de g sur $]-\infty;1[$.
2. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
   a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $k'(x) = h(x)$.
   b) Déduis-en une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.
3. Détermine une primitive de F de f sur $]-\infty;1[$.

Exercice 4 **(4 points)**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{u},\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm). 1. Soit le polynôme P tel que :$\forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{P}(z) = z^3 - (3+i)z^2 + (4+4i)z - 2(2+2i)$.

a) Justifie que 2 est une racine de P .
b) Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{P}(z) = (z-2)(z^2 - (1+i)z + 2 + 2i)$.
c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$.
d) Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 2i$ et $c = 1 - i$.

a) Place les points A, B et C dans le repère.
b) Justifie que $\frac{b-a}{c-a} = -2i$.
c) Déduis-en que le triangle ABC est rectangle en A.
d) Détermine l'affixe d du point D tel que ABDC soit un rectangle.
e) Justifie que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 5 **(4 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et définie par :
$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.
On note (C) la courbe représentative de la fonction f.

I- Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et définie par :
$g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.
On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
1.a) Justifie que $g'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
b) Déduis-en que g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Calcule $g(1)$ et déduis que : $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]0;1[, g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]1;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

II-

1.a) Justifie que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

b) Donne une interprétation graphique du résultat précédent.

c) Détermine la limite de f en $+\infty$.

2.a) Justifie que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Déduis-en les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et dresse son tableau de variation.

3. On considère la droite (D) d'équation $y = x - 1$.

a) Démontre que la droite (D) est une asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

b) Justifie que la courbe (C) au-dessus de la droite (D) sur $]0;1[$ et au-dessous de la droite (D) sur $]1;+\infty[$.

c) Trace la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère.

<u>Exercice 6</u> (5 points)

Dans une association sportive, une enquête faite par le directeur auprès d'un échantillon d'adhérents révèle que :

■ Un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis.

■ On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

M KONE, le directeur de l'association voudrait faire une distribution de matériels, mais il ne se souvient plus de la proportion de femmes inscrites.
Pour cela, étant élève de la terminale D, il sollicite ton aide.
A l'aide de tes connaissances mathématiques, aide M KONE à retrouver cette proportion.