BAC BLANC
SESSION 2023

*Coefficient :4*
*Durée : 4 h*

# MATHEMATIQUES : SERIE D

**Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3, et 3/3.**
**La calculatrice scientifique est autorisée.**

## EXERCICE 1

Pour chacune des propositions suivantes, 4 réponses sont données, dont une seule est exacte. Ecris le numéro de la proposition, suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

| N° | Proposition | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Soit A et B deux événements indépendants d'un même univers, alors | $P_B(A) = 0$ | $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ | $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ | $P_B(A) = 1$ |
| 2 | L'écriture algébrique du nombre complexe $z = \frac{1-i}{1+i}$ est : | $i$ | $-i$ | $\frac{1}{i}$ | $-\frac{1}{i}$ |
| 3 | Si $f(x) = lnx^3$ (pour $x > 0$), alors $f'(x) = \cdots$ | $\frac{3lnx^2}{x}$ | $\frac{3}{x}$ | $\frac{lnx^2}{3x}$ | $\frac{3lnx}{x}$ |
| 4 | L'ensemble des points M d'affixe z telle que $\lvert z - i\rvert = \lvert -1 - i\rvert$, est : | Une droite | Un point | Un cercle | Vide |

## EXERCICE 2

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes. Indique sur ta copie, le numéro de l'affirmation, suivi de la lettre V si l'affirmation est vraie ou F si elle est fausse

1° Si la valeur moyenne d'une fonction est nulle sur $[a; b]$alors $f$ est nulle sur $[a; b]$

2° Si $f(x) = x^{\pi}$ , alors $f'(x) = \pi x^{\pi-1}$

3° L'équation $lnx + x = 5$ admet au moins une solution sur $]0; +\infty[$

4° Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(x)$

**EXERCICE 3**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$

1° a) Calcule $u_1$ et $u_2$

b) Démontre, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2° On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.

a) Démontre que la suite $(u_n)$ est croissante .

b) Démontre que la suite $(u_n)$ est convergente.

3° Soit $(v_n)$ la suite définie , pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$

a) Démontre que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 3.

b) Exprime pour tout entier naturel n, $(v_n)$ en fonction de n.

c) En déduis que , pour tout entier naturel n ,$u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$

d) Détermine la limite de la suite $(u_n)$ .

**EXERCICE 4**

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0 ; 1 et 2 indiscernables au toucher.

On tire une boule du sac, on note son numéro $x$ et on la remet dans le sac ; puis on tire une seconde boule, on note son numéro $y$ et on la remet dans le sac.

Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

A chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$ , le point M de coordonnées $(x\ ;y)$ . On désigne par D le disque de centre O de rayon 1,7. (les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible)

1° Place dans le plan muni du repère $(O\ ;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$ les points correspondants aux différents résultats possibles.

2° Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

A :≪ Le point M est sur l'axe des abscisses ≫

B : ≪ Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ≫

3° Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$.

a) Détermine la loi de probabilité de la variable X et calcule son espérance mathématique E(X)

b) Démontre que la probabilité de l'événement ≪ le point M appartient au disque D ≫ est égale à $\frac{4}{9}$

4 ° On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.

Détermine la probabilité de l'événement C ≪ au moins un de ces points appartient au disque D ≫

5° On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan. Détermine le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement ≪ au moins un de ces points appartient à D ≫ soit supérieure ou égale à 0,9999.

**EXERCICE 5**

I Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)e^{-x} - 1$

1° Calcule la limite de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$ .

2° a) Vérifie que $\forall\, x \in \mathbb{R}\,, g'(x) = (x - 2)e^{-x}$.

b) Détermine le sens de variation de $g$ puis dresse son tableau de variation.

3 ° Calcule $g(0)$ puis détermine le signe de $g$.

II Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(e^{-x} - 1)$.

On désigne par (C) la courbe de $f$ dans un repère orthonormé (0 ; I : J). Unité graphique : 2cm.

1 ° a) Calcule la limite quand $x$ tend vers $-\infty$ de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$.

b) Interprète graphiquement ce résultat.

2 ° Calcule la limite de $f$ en $+\infty$ .

3 ° Démontre que la droite ( $\Delta$ ) d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

4 ° Détermine la position relative de (C) et ($\Delta$ ) .

5° a) Démontre que $\forall\, x \in \mathbb{R}\,, f'(x) = g(x)$ .

b) Dresse le tableau de variation de $f$.

6° Trace ($\Delta$ ) et (C).

**EXERCICE 6**

Dans le parc national de TAI, le nombre d'éléphants dénombrés au premier Janvier 2020 par le responsable était de 60000 unités. Une étude a relevé que l'évolution en fonction du temps du nombre d'éléphants est modélisée par $n(t) = 60000 \times 0{,}85^{t}$. t étant le nombre d'années écoulées après 2020. Lors d'une communication, le ministre des eaux et forêts affirme que ce nombre baisse chaque année et que si rien n'est fait pour sauvegarder l'espèce, ce nombre passerait dans quelques années en dessous du seuil tolérable de 1500 unités. Le responsable veut vérifier les propos du ministre et faire une estimation de l'année à partir de laquelle ce nombre passera en dessous du seuil toléré.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques aide-le.