UP Lycée Classique d'Abidjan **Année scolaire 2019-2020**

Lycée Classique d'Abidjan - GS ThanonNamanko - GS La Farandole - GS Mariv de Turquie - Collège Al Gadir - Collège Les Dauphins II Plateaux - Collège MISA - Collège le Serment - GS Fred et Poppée - Collège d'Application Jean Piaget - Collège Etienne - Collège Shalom

SIMILI BACCALAUREAT **Durée : 4 heures**
Session de mars 2020 **Coefficient : 4**

MATHEMATIQUES

SERIE : D

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/3 , 2/3 et 3/3 .
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1(4points)

Quinze lycées de la Côte d'Ivoire déposent chacun une liste de deux de leurs meilleurs élèves au ministère de l'éducation nationale. Les noms des trente élèves sont placés dans une enveloppe. Un premier responsable du ministère doit choisir au hasard deux noms pour un voyage en Afrique du sud. Ensuite un deuxième responsable du ministère doit choisir toujours au hasard deux autres noms pour un deuxième voyage au Brésil. Les élèves retenus pour le premier voyage ne peuvent plus être choisis pour le second.

Soit A_1 l'évènement « les 2 élèves choisis pour le premier voyage sont du même lycée ».

Soit A_2 l'évènement « les 2 élèves choisis pour le second voyage sont du même lycée ».

1. Démontre que la probabilité de A_1 est $\frac{1}{29}$.
2. a) Calcule directement $P\left(A_2 / A_1\right)$.
   b) Démontre que la probabilité pour que les élèves choisis pour le premier voyage proviennent du même lycée et ceux choisis pour le second voyage proviennent d'un autre lycée est $\frac{1}{783}$.

3. a) Calcule $P\left(A_2 / \overline{A_1}\right)$.

   b) Calcule $P\left(A_2\right)$, puis en déduire que $P\left(A_1 \cup A_2\right) = \frac{53}{783}$

4) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lycées qui ont vu leurs deux représentants choisis pour un de ces voyages. X prend les valeurs 0, 1,et2.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 (4,5points)

1) Résous dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant $\begin{cases} 3ai + b = -9 + 18i \\ 2a + b = -4 + 4i \end{cases}$

(Indication on pourra faire la différence des deux équations)

2) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante
   (E) : $z^3 - (1+i)z^2 + az + b = 0$ avec $\in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}$.
   Détermine a et b pour que 2 et 3i soient solutions de l'équation (E).

3) Détermine le nombre complexe c pour que l'on ait l'égalité suivante
   a) $z^3 - (1+i)z^2 + (4-i)z - 12 + 6i = (z-3i)(z-2)(z-c)$
   b) déduis toutes les solutions de l'équation (E).
4) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O,I,J) unité graphique 2cm,on considère les points A, B et C d'affixes respectives 3i, 2 et -1-2i.
   a) Place les points A, B et C dans le plan.
   b) Ecris sous forme algébrique puis trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$
   c) Démontre que le triangle BAC est un triangle rectangle isocèle direct en B.
   d) Soit D le point d'affixe -3+i. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
   e) déduis que les points A, B, C et D sont cocycliques. Précise le centre et le rayon du cercle.

PROBLEME(11,5points)

PARTIE A

On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1} - \ln(1-x^2)$.

1) Justifie que l'ensemble de définition de la fonction g est l'intervalle $]-1;1[$.
2) a) On suppose que g est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$, montre que pour tout x élément de l'intervalle $]-1;1[$; $g'(x) = -\dfrac{2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.
   b) Etudie les variations de la fonction g et dresse son tableau de variations.
   c) Déduis de la question précédente que pour tout x élément de $]-1,1[$, $g(x) \leq 0$.

PARTIE B

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 5cm. On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$ si $x \neq 0$ et f(0) = 0.

1) Quelle est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2) a) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x\ln(1-x^2)}{-x^2}$ et déduis-en que f est continue en 0
   b) Démontre que f est dérivable en 0.
3) a) Démontre que f est impaire.

b) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ et déduis-en. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$

c) Interprète graphiquement les limites de f.

4) On suppose que f est dérivable sur son ensemble de définition.

a) Démontre que pour tout x élément de l'ensemble de définition de f et différent de 0 on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations.

5) a) Justifie qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est $y = -x$.

b) On pose $h(x) = \ln(1 - x^2) + x^2$.

Etudie les variations de la fonction h et dresse le tableau de variations de h.

c) Calcule h(0) et déduis-en le signe de h(x) suivant les valeurs de x.

d) Déduis de la question précédente les positions relatives de (C) et (T).

6) Construis la représentation graphique (C) et la droite (T)

PARTIE C

1) Démontre que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée.
2) Détermine l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}.
3) a) Calcule $f(\frac{1}{\sqrt{2}})$ puis calcule $(f^{-1})'(-\sqrt{2}\ln 2)$.

   b) Dresse le tableau de variation de f^{-1}.

4) Construis la représentation graphique (C') de f^{-1} dans le même repère.

CORRECTION ET BAREME

EXERCICE N°1(4 points)

1) $\mathrm{P(A_1)} = \dfrac{30\times 1}{30\times 29} = \dfrac{1}{29}$ ....0.5 pt

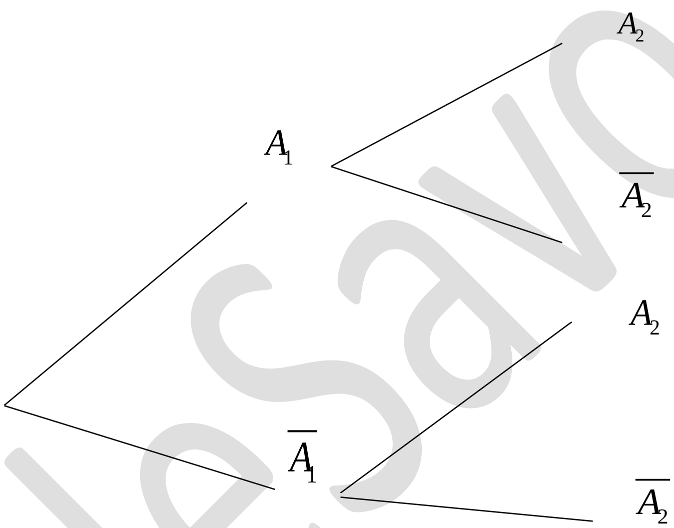
2) a) $P(A_2 / A_1) = \dfrac{28\times 1}{28\times 27} = \dfrac{1}{27}$ 0.5pt

b) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\times P(A_2 / A_1) = \dfrac{1}{29}\times\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{783}$ 0.5pt

3) a) $P(A_2 / \overline{A_1}) = \dfrac{26\times 1}{28\times 27} = \dfrac{13}{378}$ 0.5pt

b) $P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1})\times P(A_2 / \overline{A_1})\ \dfrac{1}{29}$ 0.5pt

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(\mathrm{A_1} \cap A_2) = \dfrac{53}{783}$ 0.25pt



b) $P(X=0) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \dfrac{730}{783}$ 0.25pt

$P(X=1) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = \dfrac{52}{783}$ 0.25pt

$P(X=2) = P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{783}$ 0.25pt

c) $E(X) = \dfrac{2}{29}$ 0.5pt

EXERCICE N°2

1) a=4-i b=-12+6i……………………………………………………………………………………………0.5pt
2) on obtient le système précédent…………………………………………………………………0.5pt
3) a) c=-1-2i ……………………………………………………………………………………………0.25pt

   b)les solutions sont 3i ; 2 et -1-2i……………………………………………………………0.25pt

4) a) voir figure ……………………………………………………………………………………………0.75pt

   b) $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ……………………………………………………0.25pt+0.25pt

   c) $\left|\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}\right| = \frac{|Z_C - Z_B|}{|Z_A - Z_B|} = \frac{BC}{BA} = 1$ donc le triangle BAC est isocèle en B…………0.25pt

$ARG(\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}) = MES(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle BAC est rectangle en B….0.25pt

$MES(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} \rangle 0$ donc le triangle BAC est de sens direct…………………………0.25pt

d) $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}} = 2-3i$ donc ABCD est un parallélogramme……………………………………0.25pt

$\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B} = -i$ $\left|\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}\right| = \frac{|Z_A - Z_C|}{|Z_D - Z_B|} = \frac{AC}{DB} = 1$ donc ABCD est un rectangle

$\mathrm{ARG}(\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}) = MES(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2}$ donc ABCD est un carré……………………0.25pt

e)Le carré ABCD est inscrit dans le cercle de centre d'affixe $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{-1+i}{2}$

et de rayon $\frac{|Z_A - Z_C|}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$ ………………………………………………………………0.5pt

PROBLEME

PARTIE A

1) justification de l'ensemble de définition ……………………………………………0.25pt
2) a) calcul de la dérivée ………………………………………………………………………0.5pt
   b)signe de la dérivée……………………………………………………………………………0.25pt

g est strictement croissante sur $]-1;0[$ et strictement décroissante sur $]0;1[$ ……0.25pt

tableau de variation………………………………………………………………………………0.5pt

c) 0 est le maximum de g atteint en 0 donc $\forall x \in]-1;1[, g(x) \le 0$ ……………0.25pt

PARTIE B

1) $D_f =]-1;1[$ ……………………………………………………………………………………0.25pt
2) a) ………………………………………………………………………………………………………0.5pt

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1$ donc f est dérivable en 0……………………………….0.5pt

3) a)f est impaire ……………………………………………………………………………………0.25pt

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ ……………………………0.25pt+0.25pt

c les droites d'équations x=1 et x=-1 sont asymptotes verticales…0.25+0.25pt

4)a)calcul de la dérivée…………………………………………………………………0.5pt

b) $\forall x \in]-1,1[\; f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-1;1[$

…………………………………………………………………………………………………0.25+0.25

tableau de variation………………………………………………………………………………0.5pt

5)a) équation de la tangent y=-x……………………………………………………0.25pt

b) $\forall x \in]-1,1[, h'(x) = \frac{-2x^3}{1-x^2}$ donc h est strictement croissante sur $]-1,0[$ et strictement décroissante sur $]0,1[$ ……………………………………0.25pt+0.25pt+0.25pt

tableau de variation……………………………………………………………………0.25pt

c)h(0)=0 est le maximum de h donc $\forall x \in]-1,1[, h(x) \leq 0$ ….0.25pt+0.25pt

d) $\forall x \in]-1,1[, \; f(x) + x = \frac{h(x)}{x}$ donc (C) est au-dessus de (T) sur $]-1;0[$ et au-dessous de (T) sur $]0;1[$ ………………………………………………………………0.5pt

6) voir figure…………………………………………………………….0.5pt+0.25pt

PARTIE C

1) démonstration correcte ……………………………………………………0.5pt
2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; f(0) = 0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en 0. Son ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R} - \{0\}$ ……………………………………………………0.5pt
3) a) $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}\ln(2)$ $(f^{-1})'(-\sqrt{2}\ln(2)) = \frac{1}{-4+2\ln 2}$ ………….0.5pt

   b)tableau de variation…………………………………………………………0.25pt

4) voir figure…………………………………………………………………………0.5pt