BACCALAUREAT BLANC
Session février 2020

BAREME ET CORRECTION

SERIE D

MATHEMATIQUES DREN ABIDJAN 1 UP PLATEAU.

EXERCICE 1 (4 pts)

1) $P_5 = \frac{1}{3}P_3$ et $P_5 = \frac{1}{3}P_0$ on a donc $P_0 + P_3 + P_5 = 1 \implies P_0 + \frac{2}{3}P_0 + \frac{1}{3}P_0 = 1$ — 0.5

$2P_0 = 1 \implies P_0 = \frac{1}{2}$ d'ou $P_5 = \frac{1}{6}$ et $P_6 = \frac{1}{3}$ ……………………………………….

2) a) Pour gagner la partie en 2 lancers, il faut : $(3;5)$, $(5;5)$ ou $(5;3)$

$P(G_2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{36}$ ………………………………… — 0.5

Pour gagner la partie en 3 lancers, il faut : $(3;3;3)$, $(3;0;5)$, $(0;3;5)$, $(3;3;5)$ ou $(5;0;3)$

$P(G_3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6} = \frac{7}{54}$ ……………………………………… — 0.5

b) $P(P) = 1 - [P(G_2) + P(G_3)] = 1 - \left(\frac{5}{36} + \frac{7}{54}\right) = \frac{79}{108}$ ……………………………… — 0.25

3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre des parties gagnées.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = P(P)$

$P(x = k) = C_6^k\left(\frac{79}{108}\right)^k.\left(\frac{29}{108}\right)^{6-k}$, $k \in \{0;1;….;6\}$ ……………………………………… — 0.25

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \left(\frac{29}{108}\right)^6 = 0{,}99$ …………………… — 0.25

4) a) $X \sim \beta(n;\frac{79}{108})$; X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{79}{108}$

$P_n = P(X \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \left(\frac{29}{108}\right)^n$ ………………………………………… — 0.25

b) $P_n > 0{,}99 \implies 1 - \left(\frac{29}{108}\right)^n > 0{,}99 \implies \left(\frac{29}{108}\right)^n < 0{,}01 \implies n > \frac{\ln(0{,}01)}{ln\left(\frac{29}{108}\right)}$

$\implies n > 3{,}502$ donc $n_0 = 4$ ……………………………………………………… — 0.5

5) $X(\Omega) = \{-200; 100; 300\}$

a) $P(x = -200) = P(P)$; $P(x = 100) = P(G_3)$; $P(x = 300) = P(G_2)$ ……… — 0.5

x_i	-200	100	300	Total
P_i	$\frac{79}{108}$	$\frac{7}{54}$	$\frac{5}{36}$	1

b) $E(X) = \sum x_i P_i \implies E(X) = -200 \times \frac{79}{108} + 100 \times \frac{7}{54} + 300 \times \frac{5}{36} = -\frac{275}{3}$ ……….. 0.25

$E(X) < 0$ donc le jeu est défavorable au joueur. ………………………………….. 0.25

<u>EXERCICE 2</u> (4 pts)

1) $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

$P(2i) = (2i)^3 - 2(\sqrt{3} + i) \times (2i)^2 + 4(1 + i\sqrt{3}) \times (2i) - 8i$

$P(2i) = -8i + 8\sqrt{3} + 8i + 8i - 8\sqrt{3} \implies P(2i) = 0$ donc 2i est une racine de P(z) … 0.5

2) a) déterminons a, b et c tels que $P(z) = (z - 2i)(az' + bz + c)$

$(z - 2i)(az' + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2aiz^2 - 2biz - 2ic$

$= az^3 + (b - 2ai)z^2 + (c - 2bi)z - 2ic$

Par identification à P(z) on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ai = -2(\sqrt{3} + i) \\ -2ic = -8i \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{3} \\ c = 4 \end{cases}$ …………… 0.5

$Q(z) = z^2 - 2\sqrt{3}z + 4$

$\Delta = 12 - 16 = -4 \implies \Delta = (2i)^2$

Les racines de Δ sont $2i$ et $-2i \implies \begin{cases} z_1 = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3} + i \\ z_2 = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3} - i \end{cases}$ ……………………… 0.5

b) $P(z) = (z - 2i)(z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i)$ ………………………………………… 0.5

3) a) ABCE est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$

$z_C - z_E = z_B - z_A \implies z_E = z_A + z_C - z_B \implies z_E = \sqrt{3} - i + 2i - \sqrt{3} - i$

$z_E = 0$ ……………………………………………………………………………… 0.5

b)* Forme algébrique de $\frac{d}{b}$

$$\frac{d}{b} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2(\sqrt{3} + i)} = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{2}-)}{8}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}i$$ 0.5

Forme trigonométrique de $\frac{d}{b}$

$$\left|\frac{d}{b}\right| = \frac{|d|}{|b|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}} = \frac{1}{2}$$ 0.25

Arg $(\frac{d}{b})$= arg (d) – arg (b) +2kπ (k ϵ Z)

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 0.25

$\arg(\frac{d}{b}) = \frac{6\pi - 4\pi}{24} + 2k\pi$

$\arg(\frac{d}{b}) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

c) $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 0.25

<u>Problème</u> (12 pts)

<u>Partie A</u>

$\forall x \in R, g(x) = x^2 - 2 + \ln|x|$

Dg= $]-\infty; 0[U]0; +\infty[$

$\forall x \in R,]0; +\infty[, g(x) = x^2 - 2 + 2\ln|x|$

1-a) <u>limites</u>

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \; et \; \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ 0.25x4

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = -\infty \; et \; \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$

b) $\forall x \in R^*, \; g(x) = x^2 - 2 + \ln|x|$

$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$

$g'(x) = \frac{2(x^2+1)}{x}$ 0.25

<u>signe de $g'(x)$</u>

$\forall x \in \left]-\infty ; 0\right[, x > 0 \; et \; 2(x^2+1) > 0$

$\Longrightarrow g'(x) < 0$ 0.25

$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0 \; et \; 2(x^2+1) > 0$

$\Longrightarrow g'(x) > 0$

c)Tableau de variation de

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

0.5

2a) g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0[$. Puis 0.25

$g(]-\infty;0[\,) =]-\infty;+\infty[$

Or $0 \in]-\infty;+\infty[$. Donc £ α ! $\in]-\infty;0[$

Tel que $g(\alpha) = 0$

g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Puis $g(]0;+\infty[) = \ ]-\infty;+\infty[$. Or $0 \in]-\infty;+\infty[$. Donc £ β ! $\in]-\infty;0[$

$g(\beta) = 0$ 0.25

$\alpha < 0 \quad et \quad \beta > 0 \quad \Longrightarrow \alpha < \beta$

2b) $-2 < \alpha < -1$ 0.5

$g(1{,}2) < 0 \ \ et \ g(1{,}3) > 0$

$g(1{,}2) < 0 < g(1{,}3) \Longrightarrow 1{,}2 < \boldsymbol{\beta} < 1{,}3$ 0.5

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$g'(x)$		+	‖	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$ ‖ $+\infty$	0	$+\infty$

c) $\forall x \in\ ]-\infty;[\cup]\beta;+\infty[\,, g(x) =]0+\infty;[\,,\ \Longrightarrow g(x) > 0$ 0.5

Partie B

f : R $\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{2lnx}{x} - x$

1a) Df=$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ 0.25

1b) Calcul de limites

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{2}{x}\, xln(-x) - x = -\infty$$ 0.25x4

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2}{x}\, xln(-x) - x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2lnx}{x} - x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2\left[\frac{\ln(-x)}{-x}\right] - x = +\infty$$

1c) La courbe (Cf) admet la droite (OJ) d'équation x=0 comme asymptote verticale. 0.25

Il y a existence de branches d'infinies en $-\infty$ et en $+\infty$

2a) Calcul de f'(x)

$\forall\, Df, f(x) = \frac{2}{x}\ln|x| + \frac{1}{x} - x$

Et $f'(x) = 2[\frac{-1}{x^2}\ln|x| + \frac{1}{x} \text{x} \frac{1}{x}]$

$=\frac{-2\ln|x|+2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}$

$=\frac{-[x^2-2+2\ln|x|}{x^2}$

$f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ 0.25

Signe de $f'(x)$

De la question 2-c) de la Partie A on déduit :

$\forall x \epsilon\ ]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[, f'(x) < 0$

$\forall x \epsilon\ ]\alpha;0[\cup]0;\beta[, f'(x) > 0$

2-b) $\alpha < 0\ et\ g(\alpha) = 0$

$$f(\alpha) = \frac{2\ln|x|}{\alpha} - \alpha$$

$$g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 2 + 2\ln|\alpha| = 0$$

$$2ln|\alpha| = 2 - \alpha^2$$

$$f(\alpha) = \frac{2-\alpha^2}{\alpha} - \alpha = \frac{2-\alpha^2-\alpha^2}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha^2)}{\alpha}$$ 0.25

$$f(\beta) = \frac{2(1-\beta^2)}{\beta}$$ 0.25

2-c) Tableau de variation

x	$-\infty$	α		0		β	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(x)$	$\nearrow -\infty$	||	$+\infty \nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow +\infty$

0.25

$\forall x \epsilon]-\infty;0[, f(x) > 0\ et\ \forall x \epsilon]0;+\infty[, f(x) < 0$ 0.25

3a) $\forall x \epsilon\ Df, f(x) - (-x) = \frac{2\ln|x|}{x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\ln|x|}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln|x|}{x} = 0$$ 0.25

(Cf) admet la droite (Δ): $y = -x$ comme asymptote oblique en $-\infty\ et\ en + \infty$

3b) Soit $M(x_0, y_0) \in p$

$\{M(x0, y0)\}$=(Cf)∩ (Δ) $\Longleftrightarrow \frac{2\ln|x|}{x} = 0 \Longleftrightarrow$ ln|x|=0

$\Longleftrightarrow$ x=1 ou x= -1

E(1 ;-1) et

F(-1 ;1) 0.25

4) Construction (C) (Voir feuille annexe) 0.25

5) $h = f \ sur \ ]-\infty;\alpha[$

a) Sur l'intervalle $]-\infty;\alpha[$, f est continue et strictement décroissante et $f(]-\infty;\alpha[) =]f(\alpha);+\infty[$. h étant la restriction de f à $]-\infty;\alpha[$, h a les mêmes propriétés que f sur $]-\infty;\alpha[$. Par conséquent h réalise une bijection de $]-\infty;\alpha[$ sur$]f(\alpha);+\infty[$. h admet donc une bijection réciproque h^{-1} définie de $]f(\alpha);+\infty[$ vers $]-\infty;\alpha[$

b) Tableau de variation de h^{-1} 0.5

x	$f(\alpha)$	$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	$-$	
$(h^{-1})(x$	α ↘	$-\infty$

0.25

c) h^{-1} n'est pas dérivable en α car h'(α)= $f'(\alpha) = 0$ 0.25

$h(-1) = f(-1) = 1$ je vais à la maison

$$(h^{-1})'(1) = \frac{1}{h'(-1)} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

0.5

d) Tracer (Ch^{-1}) : Voir figure feuille annexe

PARTIE C $k = f/[0;+\infty[$ 1a) $\forall x \epsilon]0;+\infty[, f(x) = \frac{2\ln(x)}{x} - x$ car $\|x\| = x$ b) Les primitives de k sur $]0;+\infty[$ sont fonctions : $x \longmapsto 2 \text{ x } \frac{1}{2}[\ln x)]^2 - \frac{1}{2}x^2 + c,\ avec\ c\epsilon\mathbb{R}$ Soit $\longmapsto [\ln x)]^2 - \frac{1}{2}x^2 + c,\ avec\ c\epsilon\mathbb{R}$ La primitive de F de k qui s'annule en 1 est telle que F(1)=0 F(1)= $[\ln x)]^2 - \frac{1}{2}x^2 + c = c - \frac{1}{2}$ Et $c - \frac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow c = \frac{1}{2}$ La primitive F recherchée est définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = [\ln x)]^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 2a) $\forall x \epsilon]0;+\infty[, F'(x) = \frac{2\ln(x)}{x} - x$ D'après la question 2c) de la partie B, $F'(x) < 0\ car\ f(x) < 0$ F est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ 2b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} F(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\frac{(lnx)^2}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}]$ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2[(\frac{(lnx)}{x})^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}]$ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty]$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\frac{ln}{x}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}\right] = -\frac{1}{2} \end{cases}$	0.25 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25

Tableau de variation de F

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖		$-$		
$F(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

0.25
