

Barème B.B N°2 TD

Exercice 1 (3 pts)

1) on constate que $\forall i \in \{0; 1; 2; 3\}$
 on a $0 \leq p(x=x_i) \leq 1$ et
 $\sum_{i=0}^3 p(x=x_i) = 1$ donc ce
 tableau est bien une loi de
 probabilité.

2) $p(x \geq 2) = p(x=2) + p(x=3) = 0,61$

3) $E(X) = 1,72$
 $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4,0216$

4) $P_n = 1 - (0,39)^n$
 $P_n \geq 0,999 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,39)}$
 donc $n = 8$

Exercice 2 (5 pts)

1. a) Voir courbe
 b) Par conjecture la suite u est
 croissante et admet 2 comme limite

2. a) $u_1 \geq u_0$ $p(0)$ est vraie
 supposons $\forall n \geq 0, u_n \geq u_{n-1}$ est vraie
 et croissante donc $f(u_n) \geq f(u_{n-1})$ soit
 $u_{n+1} \geq u_n$ est vraie donc
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$

b) Par récurrence on montre que
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$ donc u est
 majorée par 2

c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite
 est croissante et elle est majorée
 par 2 donc elle est convergente

d) la limite de u est solution
 de l'équation $f(x) = x$

1

$x = 2$ ou $x = -1$, comme $\forall n \in \mathbb{N}$
 $u_n \geq 0$ on a donc $\lim u_n = 2$

3a) $2 - u_{n+1} = \frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}}$

or $\frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}} \leq \frac{2 - u_n}{2}$ donc
 $2 - u_{n+1} \leq \frac{2 - u_n}{2}$

b) on a $2 - u_n \leq \frac{2 - u_{n-1}}{2}$

produit membre à membre
 $\frac{2 - u_{n-1}}{2} \leq \frac{2 - u_{n-2}}{2}$
 $\vdots$
 $\frac{2 - u_2}{2} \leq \frac{2 - u_1}{2}$
 $\frac{2 - u_1}{2} \leq \frac{2 - u_0}{2}$

$2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{2 - u_0}{2}\right)$

$2 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ car $\frac{2 - u_0}{2} = 1$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2 - u_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$ on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Problème (12 pts)

Partie A

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right) = +\infty$

(+) justification

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ (justifié)}$$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $g'(x) = -e^{-x} + 2$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln 2 < x$$

Tableau de signe de g'

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

sens de variation de g

$\forall x \in]-\infty, -\ln 2[, g'(x) < 0$ donc
 g est strictement décroissante
sur $]-\infty, -\ln 2[$

$\forall x \in]-\ln 2, +\infty[, g'(x) > 0$ donc
 g est strictement croissante
sur $]-\ln 2, +\infty[$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(-\ln 2)$	$+\infty$

$$g(-\ln 2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0,6$$

3. 0,6 est le minimum absolu
de g donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$

Partie B $f(x) = \ln(e^{-x} + 2x)$
 $= \ln(g(x))$

1. $x \in D_f \Leftrightarrow e^{-x} + 2x > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$
tjs vraie $\forall x \in \mathbb{R}$ donc
 $D_f = \mathbb{R}$

2.a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(g(x))$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln X = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} \times 2 = 0$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

Interprétation graphique

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une
branche parabolique de
direction (OI)

3.a) $f(x) - (-x) = -x + \ln(1 + 2xe^x) + x$
 $f(x) + x = \ln(1 + 2xe^x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + 2xe^x)$
 $= \ln 1 = 0$

donc la droite $(D): y = -x$ est
A.O.A. $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.

c) Position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (D)

Resolvons l'inéquation
 $f(x) + x > 0 \Leftrightarrow \ln(1 + 2xe^x) > 0$
 $\Leftrightarrow 1 + 2xe^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) + x$		-	+

$\forall x \in]-\infty, 0[, f(x) + x < 0$ donc
 $(\mathcal{C}_f)$ est au dessous de (D)

$\forall x \in]0, +\infty[f(x) + x > 0$ donc
(E) est au dessus de (D).

(E) et (D) se coupent au
pt $O(0;0)$.

4.a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ or $\forall x \in \mathbb{R} g(x) > 0$

donc $f'(x)$ et $g'(x)$ ont le m
signe.

b)

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

Sens de variation

$\forall x \in]-\infty, -\ln 2[, f'(x) < 0$ donc
 f est strictement décroissante
sur $]-\infty, -\ln 2[$.

$\forall x \in]-\ln 2, +\infty[, f'(x) > 0$ donc
 f est strictement croissante sur
 $]-\ln 2, +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\ln 2)$	$+\infty$

$$f(-\ln 2) = \ln(2 - 2\ln 2) \approx -0,5$$

c) Une équation Coordonnées de A.

$$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$(D): y = -x$$

$$(T) \parallel (D) \Leftrightarrow f'(a) = -1$$

$$\frac{-e^{-a} + 2}{e^{-a} + 2a} = -1 \Leftrightarrow a = -1$$

$$A(-1; \ln(e-2))$$

$$d) (T) = [A]: y = -x - 1 + \ln(e-2)$$

5.a) $f(0) = \ln(1+0) = 0$ donc
0 est une racine de f .

b) Toute méthode correcte

$$e) \left. \begin{array}{l} f(-1,3) = 0,067 \\ f(-1,2) = -0,083 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(-1,3) \times f(-1,2) < 0 \\ \text{donc } -1,3 < \alpha < -1,2 \end{array}$$

Encadrement par balayage

$$-1,26 < \alpha < -1,25$$

d) Toute méthode correcte

e) Voir courbe.

Partie e

1. voir courbe

$$2. A(x) = \int_x^0 -\ln(1+2xe^x) dx$$

$$3. I = \int_{-1}^0 (x^2-1)e^{-x} dx = \left[(-x^2 - x - 1)e^{-x} \right]_{-1}^0$$

$$I = -1$$

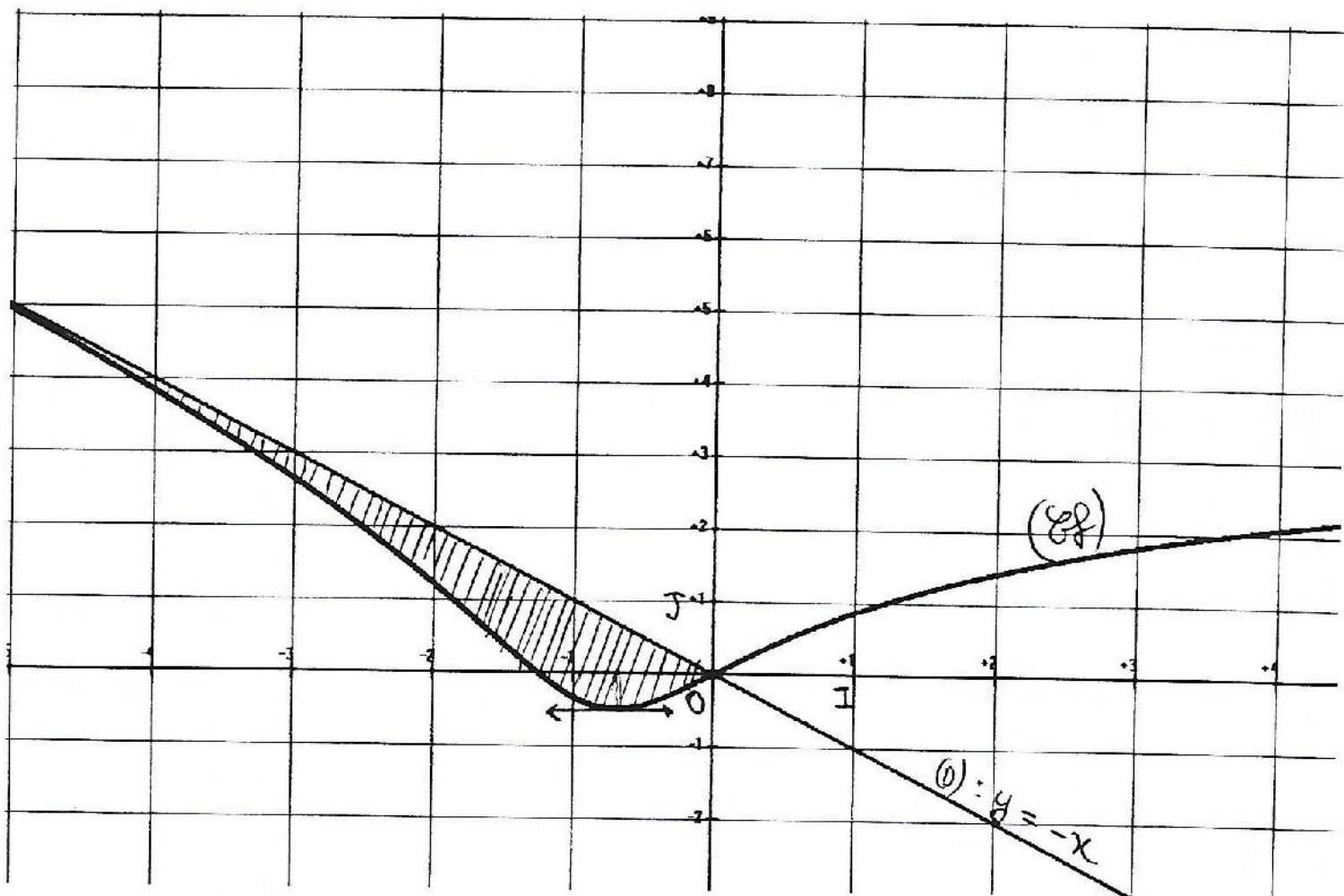
$$b) -2\ln\left(1-\frac{2}{e}\right) + \int_{-1}^0 (x^2-1)e^{-x} dx < A(1) < -2\ln\left(1-\frac{2}{e}\right) + \int_{-1}^0 \left(2(x^2-1)e^{-x} + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$2 \times 0,66 < A(1) < 1,16 \times 2$$

$$1,32 < A(1) < 2,32 \text{ cm}^2$$

Courbe représentative de f

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 2x)$$



$(Cf): 0,75$

Hauteur de $\Delta: 0,25$